ENS Lyon

Analyse complexe

Emmanuel Peyre

Licence de mathématique

29 septembre 2022

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Ce polycopié est destiné aux étudiants de troisième année de licence de l'École Normale Supérieure de Lyon.

Son contenu est en grande partie inspiré par un cours de J. Oesterlé donné à l'École Normale Supérieure autour des années 1987. Le contenu de son cours était lui-même basé sur un cours de M. Hervé. Toutefois les erreurs et faiblesses de ces notes sont uniquement le fait de l'auteur de ces notes.

Ces notes viennent en appui du cours donné, mais ne le remplacent pas.

I. Fonctions holomorphes

I.1. Définitions

Notations I.1. — La lettre **C** (au tableau $\mathbb{C}$) désigne le corps des complexes que l'on verra aussi comme un plan vectoriel réel muni de la base $(1, \mathrm{i})$ et de la structure euclidienne définie par le module $|\cdot|$. On note $\Re(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Le corps des complexes **C** muni du module $|\cdot|$ est un **R**-espace vectoriel normé ; il est donc muni d'une structure d'espace topologique (*cf.* les rappels A2.1).

Définition I.2. — Soit U un ouvert de **C**, soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application. Soit $a \in U$. On dit que l'application f est *holomorphe* (ou *dérivable au sens complexe*) en a si le quotient

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

admet une limite quand le nombre complexe z tend vers a. Cette limite s'appelle la *dérivée de f en a* et se note $f'(a)$.

Remarque I.3. — Si l'application f est dérivable en a, elle est forcément continue en a.

Proposition I.4. — *Soient U un ouvert de* **C** *et $f : U \to \mathbf{C}$ une application. Soient $a \in U$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application f est holomorphe de dérivée λ en a ;*

(ii) *On la formule*

$$f(a+h) = f(a) + \lambda h + o_{h\to 0}(|h|);$$

(iii) *L'application f est différentiable en a et sa différentielle est l'application* **R**-*linéaire* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *donnée par $u \mapsto \lambda u$.*

(iv) *Les applications $u = \Re(f) : z \mapsto \Re(f(z))$ et $v = \Im(f) : z \mapsto \Im(f(z))$ sont différentiables en a et vérifient les relations, dites de* Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

De plus, $\Re(\lambda) = \frac{\partial u}{\partial x}(a)$ et $\Im(\lambda) = \frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

Démonstration. — Démontrons l'équivalence entre (i) et (ii). Le quotient $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ converge vers λ si et seulement si

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lambda + o_{z\to a}(1)$$

ce qui équivaut à

$$f(z) = f(a) + \lambda(z-a) + o_{z\to a}(|z-a|).$$

L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte de la définition de la différentielle.

Démontrons enfin l'équivalence entre (iii) et (iv). On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ et $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, où x, y, α et β désignent des nombres réels. Alors on peut écrire

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

Donc f est différentiable en a si et seulement u et v le sont

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{d}f_a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice de l'application linéaire $u \mapsto \lambda u$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

□

Définition I.5. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une application. On dit que f est *holomorphe* si elle est holomorphe en tout point $a \in U$. L'application de U dans $\mathbf{C}$ donnée par $a \mapsto f'(a)$ s'appelle alors la *dérivée de* f.

Notation I.6. — Pour tout ouvert U de $\mathbf{C}$, on note $\mathscr{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Remarque I.7. — Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ et W une partie de $\mathbf{C}$, une application $f : U \to W$ est dite holomorphe si la composée avec l'injection canonique $W \to \mathbf{C}$ l'est.

I.2. Exemples. — Dans tout ce paragraphe, la lettre U désigne un ouvert de $\mathbf{C}$

Exemples I.8. — i) Une fonction constante est holomorphe de dérivée nulle.

ii) L'application $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} : z \mapsto z$ est holomorphe de dérivée constante 1.

iii) Si V est un ouvert de U (c'est-à-dire un ouvert de $\mathbf{C}$ contenu dans U) et si $f \in \mathscr{H}(U)$, alors la restriction de f à V, notée $f_{|V}$ appartient à $\mathscr{H}(V)$.

Les règles de dérivations connues pour les applications réelles s'applique également au cadre de la dérivation complexe :

Proposition I.9. — *Soient f et g des applications holomorphes sur U. alors*

a) $f+g \in \mathscr{H}(U)$ *et* $(f+g)' = f' + g'$;

b) $fg \in \mathscr{H}(U)$ *et* $(fg)' = f'g + fg'$.

Démonstration. — Pour $z \in U - \{a\}$ [1], on a les formules

$$\frac{(f+g)(z)-(f+g)(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} + \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

et

$$\frac{fg(z)-fg(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}g(z) + f(a)\frac{g(z)-g(a)}{z-a}.$$

Le terme de droite de la dernière égalité converge vers $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ quand z tend vers a. □

Proposition I.10. — *Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ une fonction holomorphe telle que*

$$\forall z \in U, \quad f(z) \neq 0.$$

Alors $\frac{1}{f} \in \mathscr{H}(U)$ *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Démonstration. — Comme dans le cas réel, cela découle de la formule

$$\frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(a)}}{z-a} = \frac{1}{f(a)f(z)} \times \frac{f(a)-f(z)}{z-a}$$

pour $z \neq a$. □

Remarque I.11. — On notera que les exemples précédents montrent qu'étant données $u, v \in \mathscr{H}(U)$, le quotient $\frac{u}{v}$ est holomorphe sur

$$\{z \in U \mid v(z) \neq 0\}$$

et on a la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

1. Si X et Y sont des ensembles, on note

$$X - Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

Corollaire I.12. — *Une fonction polynomiale est holomorphe sur* $\mathbf{C}$ *et si* $f(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ *pour* $z \in \mathbf{C}$ *avec* $d \in \mathbf{N}$ *et* $a_0, \dots, a_d \in \mathbf{C}$, *alors*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k k z^{k-1}$$

pour $z \in \mathbf{C}$.

Un fraction $\frac{P}{Q}$ *où* P *et* Q *sont des fonctions polynomiales est holomorphe sur* $\mathbf{C} - \overset{-1}{Q}(\{0\})$. [2]

Proposition I.13. — *On note également* V *un ouvert de* $\mathbf{C}$. *Soient* $f \in \mathscr{H}(U)$ *et* $g \in \mathscr{H}(V)$. *On suppose que* $f(U) \subset V$. *Alors la composée* $g \circ f \in \mathscr{H}(U)$ *et*

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Démonstration. — Soit $a \in U$. Posons $b = f(a)$. Par hypothèse $b \in V$. Soit $\tau_g : V \to \mathbf{C}$ l'application définie par

$$\tau_g(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(b)}{z-b} & \text{si } z \neq b \\ g'(b) & \text{si } z = b. \end{cases}$$

L'application τ_g est continue et

$$g(z) = g(b) + (z-b)\tau_g(z)$$

pour tout $z \in V$. Donc pour $z \neq a$, on obtient les formules

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z-a} = \frac{(f(z) - f(a))}{z-a} \tau_g(f(z))$$

Qui converge vers $f'(a)g'(f(a))$ lorsque z tend vers a. □

I.3. Inégalité des accroissements finis. — Je vais commencer par une remarque qui utilise le calcul de la différentielle d'une composée qui nous sera utile par la suite.

Proposition I.14. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et soit* $f \in \mathscr{H}(U)$. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $\gamma : I \to U$ *une application dérivable alors* $f \circ \gamma$ *est dérivable de dérivée donnée par*

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t) \times f'(\gamma(t)).$$

2. Pour éviter toute confusion, étant donnée une application $f : X \to Y$ et une partie B de Y, l'image réciproque de B par f est notée $\overset{-1}{f}(B)$.

Démonstration. — Cela résulte de la formule pour la différentielle d'une composée :

$$\mathrm{d}(f\circ\gamma)_t = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\circ \mathrm{d}\gamma_t$$

et de l'expression de ces différentielles en termes de dérivée : $\mathrm{d}f_{\gamma(t)} : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ est donnée par $u\mapsto f'(\gamma(t))u$ et $\mathrm{d}\gamma_t:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ par $v\mapsto v\gamma'(t)$. □

***Théorème I.15* (Inégalité des accroissements finis).** — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\in\mathscr{H}(U)$. Soient $a,b\in U$ tels que le segment $[a,b]$ est contenu dans U. S'il existe $M\in\mathbf{R}$ tel que*

$$\forall z\in[a,b],\quad |f'(z)|\leqslant M$$

alors

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M|b-a|.$$

Démonstration. — Considérons l'application $\gamma:[0,1]\to\mathbf{C}$ donnée par $t\mapsto(1-t)a+tb$. L'application γ est dérivable de dérivée consante $b-a$ et à valeur dans l'ouvert U. Par la proposition précédente, l'appliation $f\circ\gamma$ est dérivable et

$$|f\circ\gamma'(t)| = |\gamma'(t)\times f'(\gamma(t))|\leqslant M|b-a|$$

pour tout $t\in[0,1]$. On applique alors l'inégalité des accroissements finis pour les applications à valeurs vectorielles. □

Corollaire I.16. — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\in\mathscr{H}(U)$ telle que f' soit la fonction constante nulle. Alors f est* localement constante,*, c'est-à-dire elle vérifie la condition : pour tout $z\in U$, il existe $r\in\mathbf{R}_+^*$ telle que la restriction $f_{|U\cap B(z,r)}$* [3] *est constante.*

Démonstration. — Soit $z\in U$. Par définition des ouverts, on peut choisir $r\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $B(z,r)\subset U$ et pour tout $y\in B(z,r)$, on applique l'inégalité des accroissements finis. □

La fonction U n'est pas forcément constante car U peut être la réunion de plusieurs « morceaux ». Ainsi dans la figure 1, l'ouvert U est représenté en rouge, et une fonction prenant les valeurs indiquées sur chaque morceau est localement constante. La notion de connexité donnée en appendice dans la définition A1.11, permet de préciser cela.

Corollaire I.17. — *Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f\in\mathscr{H}(U)$ telle que f' est l'application constante nulle. Alors f est constante.*

3. Si $f:X\to Y$ est une application et $Z\subset X$ alors $f_{|Z}:Z\to Y$ est l'application déduite de f par restriction à Z, donnée par $z\mapsto f(z)$.

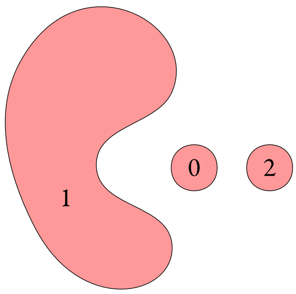

FIGURE 1. Fonction localement constante

Démonstration. — Le résultat est vrai si $U = \emptyset$. Sinon soit $a \in U$ et soit $\lambda = f(a)$. L'ensemble

$$C = \overset{-1}{f}(\{\lambda\})$$

est une partie fermée de U, car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermée. Mais si $z \in C$, alors par le corollaire I.16, il existe $r > 0$ tel que $B(z, r) \subset C$. Donc C est également une partie ouverte de $\mathbf{C}$ et donc de U. Comme C est ouverte et fermée et que U est supposé connexe, $C = \emptyset$ ou $C = U$. Comme $a \in C$, on obtient que $C = U$ et la fonction f est constante de valeur λ. □

I.4. Théorème d'inversion locale. — Pour les applications de $\mathbf{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires est des plus pratiques pour démontrer la surjectivité d'une application. Sur $\mathbf{C}$, il n'y a pas de propriété analogue pour les applications continues, toutefois on dispose du résultat suivant pour les applications holomorphes :

***Théorème I.18* (Inversion locale).** — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $a \in U$. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. On suppose que*

(i) $f'(a) \neq 0$ *;*

(ii) *L'application f' est continue.*

Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a tel que $f(V)$ est ouvert et l'application de V dans $f(V)$ déduite de f par restriction est bijective et sa réciproque $f^{-1} : f(V) \to V$ est holomorphe. En outre

$$\forall b \in f(V), \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Remarques I.19. — i) Cet énoncé est un cas particulier d'un résultat sur les applications différentiables entre espaces vectoriels normés *complet*, c'est-à-dire dans lesquels toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

qui vérifie le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p, q \in \mathbf{N}, \quad (p \geqslant N) \text{ et } (q \geqslant N) \Longrightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon$$

est convergente.

ii) Nous verrons un peu plus tard que si $f \in \mathscr{H}(U)$, alors la dérivée f' est continue. Autrement dit, la deuxième condition est automatiquement vérifiée.

Pour démontrer ce théorème d'inversion locale, nous allons utiliser le théorème du point fixe (proposition A2.7) pour construire l'application réciproque.

Preuve du théorème d'inversion locale. — Pour $b \in \mathbf{C}$, on considère l'application $g_b : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$g_b(z) = z - \frac{f(z) - b}{f'(a)}$$

pour tout $z \in U$. Cette application vérifie les assertions suivantes

a) $\forall z \in \mathbf{C}, \quad g_b(z) = z \Longleftrightarrow f(z) = b$;

b) L'application g_b est holomorphe sur U de dérivée donnée par

$$g_b'(z) = 1 - \frac{f'(z)}{f'(a)}$$

pour $z \in U$. En particulier, l'application g_b' ne dépend pas de b. Comme f' est supposée continue, elle est continue et $g_b'(a) = 0$.

Il existe donc un nombre réel r strictement positif tel que $\overline{B}(a, r) \subset U$ et

$$\forall b \in \mathbf{C}, \forall z \in \overline{B}(a, r), \quad |g_b'(z)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Par l'inégalité des accroissements finis (théorème I.15),

$$\forall b \in \mathbf{C}, \forall x, y \in \overline{B}(a, r), \quad |g_b(x) - g_b(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

En particulier, cela nous donne les inégalités

$$|g_b(z) - a| \leqslant |g_b(z) - g_b(a)| + |g_b(a) - a| \leqslant \frac{1}{2}|z - a| + \left|\frac{f(a) - b}{f'(a)}\right|.$$

Soit $r' < r$. Pour tout $b \in \mathbf{C}$ tel que $|b - f(a)| < \frac{r'}{2}|f'(a)|$, l'application g_b induit donc une application $\frac{1}{2}$-contractante de $\overline{B}(a, r)$ dans $\overline{B}(a, \frac{r}{2} + \frac{r'}{2})$ qui est contenue dans $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$. Par la proposition A2.7, il existe un *unique* $z \in \overline{B}(a, r)$ tel que $g_b(z) = z$, ce qui équivaut à $f(z) = b$.

Comme $g_b(\overline{B}(a,r))$ est contenu dans $B(a,r)$, on obtient en outre que cet unique antécédent z appartient à la boule ouverte $B(a,r)$.

Posons maintenant $W = B(f(a), \frac{r'}{2}|f'(a)|)$ et $V = \overset{-1}{f}(W) \cap B(a,r) \subset U$. Alors W et V sont des ouverts de $\mathbf{C}$; comme $f(a) \in W$, l'ouvert V contient a et, par ce qui précède, l'application f induit une bijection de V sur $f(V) = W$.

Comme

$$|g_b(z) - g_{b'}(z)| = \frac{1}{|f'(a)|}|b - b'|$$

pour tous $b, b' \in \mathbf{C}$ et tout $z \in U$, il résulte du point b)) du théorème du point fixe A2.7 et du critère séquentiel de continuité que l'application $f^{-1} : W \to V$ est continue.

Il reste à démontrer qu'elle est holomorphe. Soit $b \in W$ et soit $z \in W - \{b\}$. Comme $f^{-1}(b) \in B(a,r)$, il résulte de (1) que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. De plus, on a les relations

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(b)}{z - b} = \left(\frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(b)}\right)^{-1}$$

qui converge vers $f'(f^{-1}(b))^{-1}$ puisque f^{-1} est continue. □

I.5. Lien avec la géométrie. — Dans ce paragraphe, si u et v sont des nombres complexes non nuls nous notons $\widehat{uv}$ l'angle orienté entre les nombres complexes u et v, dont une mesure est l'argument du quotient u/v.

Remarque I.20. **—** Soit $l : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application $\mathbf{R}$-linéaire injective, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists \lambda \in \mathbf{C}, \forall z \in \mathbf{Z}, \quad l(z) = \lambda z$;

(ii) $\forall u, v \in \mathbf{C} - \{0\}, \quad \widehat{l(u)l(v)} = \widehat{uv}$;

(iii) L'application l est une similitude directe : il existe $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |l(z)| = \rho |z|.$$

et le déterminant de la matrice de l dans une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ est strictement positif.

Démonstration. — Démontrons l'implication (i)→(ii). Si $\lambda = \rho e^{i\theta}$, la multiplication par λ est la composée de la rotation d'angle θ centrée en l'origine 0 et de l'homothétie de rapport ρ et de centre 0. On peut aussi déduire cette implication de la relation

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\lambda u}{\lambda v}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{u}{v}\right).$$

Démontrons la réciproque. Posons $\lambda = l(1)$ et soit $z \in \mathbf{C}$. Comme l'application l préserve les angles orientés de vecteurs, le triangle $(l(z), l(1), l(0)$ est semblable au triangle $(z, 1, 0)$ (*cf.* figure 2). Donc si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $|l(z)| = \rho|l(1)|$ et $\mathrm{Arg}(l(z)) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(l(1))$. Donc $l(z) = zl(1) = \lambda z$. □

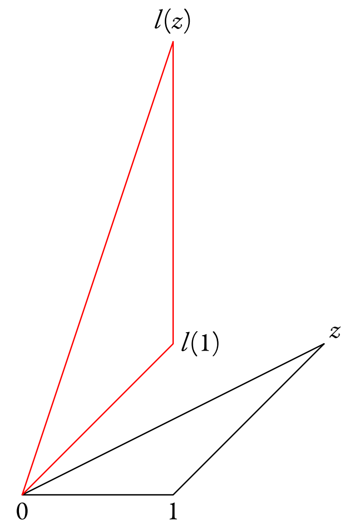

FIGURE 2. Multiplication complexe

Cette remarque implique la proposition suivante :

Proposition I.21. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application. Soit $a \in U$. L'application f est holomorphe en a de dérivée non nulle en a si et seulement si elle est différentiable en a et $\mathrm{d}f_a$ est injective et préserve les angles orientés de vecteurs.*

On peut donc retenir comme principe que les fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas sont celles qui préservent les angles orientés de vecteurs. Graphiquement, la transformée d'une image par une application holomorphe est localement semblable à l'image de départ. Un exemple saisissant est fourni par une œuvre d'Escher (figure 3)

Figure 3. Transformation holomorphe

Exercices

Exercice I.1. 1. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ l'application définie par $z \mapsto \bar{z}$.

(a) Démontrer que l'application f est différentiable (vue comme application entre espace vectoriels réels) mais qu'elle n'est pas holomorphe sur $\mathbf{C}$.

(b) Déterminer les points en lesquels f est dérivable au sens complexe.

2. Même question pour l'application $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donnée par

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{z^3}{\bar{z}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice I.2. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.

1. Soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Démontrer que si $f(\Omega) \subset \mathbf{R}$, alors f est constante.
2. Soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) L'application f est constante ;
   (ii) L'application $\mathfrak{I}(f)$ est constante ;
   (iii) L'application $\mathfrak{R}(f)$ est constante ;
   (iv) L'application $|f| : z \mapsto |f(z)|$ est constante ;
   (v) L'application $\overline{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe ;

6. On note $\overline{\Omega} = \{\bar{z}, z \in \Omega\}$, Démontrer qu'une application $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si l'application $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbf{C}$ l'est.
7. Soient f et $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ des applications telles que $f\overline{g}(\Omega) \subset \mathbf{R}$. On suppose en outre que g ne s'annule pas sur Ω. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f = cg$.
8. Considérons les opérateurs différentiels

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(a) Soit f une application différentiable de Ω dans $\mathbf{C}$. Démontrer que f est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$ et que $f' = \partial f$ dans ce cas.

(b) Démontrer l'identité $\overline{\partial} f = \overline{\partial \overline{f}}$.

(c) Si f est deux fois différentiable, démontrer les égalités $\partial\overline{\partial} f = \overline{\partial}\partial f = \frac{1}{4}\Delta f$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien.

Exercice I.3. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. On suppose qu'il existe trois nombres réels non tous nuls a, b et c tels que

$$a\Re(f) + b\Im(f) = c.$$

Démontrer que l'application f est constante.

Exercice I.4 (Conformité des fonctions holomorphes). Soit f une application différentiable d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Démontrer que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ si et seulement si pour tout couple de courbes différentiables $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \to \Omega$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$ et la différentielle de f en $\gamma_1(0)$ est non nulle, l'angle orienté $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ est égal à l'angle orienté $((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0))$.

Exercice I.5 (Transformation de Möbius). On note $\mathbf{D}$ le disque ouvert unité et $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Soit $\overline{\mathcal{H}}$ son image par la conjugaison. Considérons l'homographie :

$$h : z \longmapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que $1 \notin \mathrm{Im}(h)$ et $h(\mathbf{R}) = \partial\mathbf{D} - \{1\}$. En déduire que

$$h(\mathcal{H}) \cup h(\overline{\mathcal{H}} - \{-\mathrm{i}\}) = \mathbf{C} - \partial\mathbf{D}$$

   Déterminer $h(\mathcal{H})$ à l'aide d'un argument de connexité.

2. Soit λ un nombre complexe de module 1 et $a \in \mathbf{D}$. Considérons l'homographie

$$h_{\lambda,a} : z \longmapsto \lambda\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

   Démontrer que $h_{\lambda,a}(\partial\mathbf{D}) \subset \partial\mathbf{D}$. En cherchant l'expression de l'application réciproque de $h_{\lambda,a}$, démontrer $h_{\lambda,a}(\partial\mathbf{D}) = \partial\mathbf{D}$ puis démontrer que $h_{\lambda,a}(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.

II. Séries entières et fonctions analytiques

Dans ce chapitre la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps qui est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

II.1. L'algèbre des séries entières

Définition II.1. — On appelle *algèbre des séries formelles à coefficients dans* $\mathbf{K}$ (ou *algèbre des séries entières* si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), l'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbf{K}$, où l'on note $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$ la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ muni de

— **L'addition :**

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n + \sum_{n\in\mathbf{N}} \beta_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} (\alpha_n + \beta_n) T^n;$$

— **La multiplication scalaire :**

$$\lambda \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda \alpha_n T^n \text{ pour tout } \lambda \in \mathbf{K};$$

— **Le produit** (dit de Cauchy) **:**

$$\Big(\sum_{p\in\mathbf{N}} \alpha_p T^p\Big) \times \Big(\sum_{q\in\mathbf{N}} \beta_q T^q\Big) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \Big(\sum_{p=0}^{n} \alpha_p \beta_{n-p}\Big) T^n.$$

On notera $\mathbf{K}[[T]]$ cette algèbre.

L'adjectif « formel » indique qu'ici on ne se préoccupe pas encore de la convergence de la série. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$ ne converge que pour $z = 0$.

Remarques II.2. — i) L'algèbre des polynômes $\mathbf{K}[T]$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{K}[[T]]$ (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par multiplication). Elle est formée des séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$ telles que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \mid \alpha_n \neq 0\}$ est fini. On identifie en outre le corps $\mathbf{K}$ avec la sous-algèbre des séries *constantes*, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$ avec $\alpha_n = 0$ pour $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ est notée simplement α_0.

ii) On identifie également $\mathbf{R}[[T]]$ à l'anneau des séries entières dont tous les coefficients sont réels.

iii) Plus généralement, pour un corps commutatif $\mathbf{L}$, on peut définir de même l'algèbre $\mathbf{L}[[T]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbf{L}$.

Définition II.3. — La *dérivée* d'une série formelle $S = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$ est la série formelle

$$S' = \sum_{n\in\mathbf{N}} (n+1)\alpha_{n+1} T^n.$$

Remarque II.4. — On a les relations

$$(R+S)' = R' + S' \quad \text{et} \quad (RS)' = R'S + RS'$$

pour tous $R, S \in \mathbf{K}[[T]]$. En outre, pour $S \in \mathbf{K}[[T]]$, $S' = 0$ si et seulement si S est une série constante.

II.2. Rappels sur les rayons de convergence

Définition II.5. — Soit $S = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ une série formelle. Son *rayon de convergence* est défini par

$$R_S = \max\{ t \in \mathbf{R} \mid \text{La série} \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n t^n \text{ converge} \} \in [0, +\infty].$$

Proposition II.6. — *Soit $S = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ une série formelle.*

(i) *Soit $z \in \mathbf{C}$, si $|z| < R_S$, alors la série* de nombres complexes $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ *converge absolument ;*[4]

(ii) *Soit $z \in \mathbf{C}$, si $|z| > R_S$, alors la suite de nombre complexes $(\alpha_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée et la série correspondante est donc forcément divergente.*

Proposition II.7. — *Le rayon de convergence est donné par la formule*

$$R_S = \Big(\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\alpha_n|^{1/n} \Big)^{-1}.$$

Remarques II.8. — i) Pour une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(\sup_{p\geqslant n} u_p)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $]-\infty, +\infty]$ est décroissante on peut donc définir la *limite supérieure*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geqslant n} u_p \in [-\infty, +\infty].$$

ii) L'assertion ((ii)) de la proposition II.6 implique la proposition II.7. En effet pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $t < R_S$ implique que la suite $(\alpha_n t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition II.9. — *Soient S et T des séries entières. Alors*

(i) *On a l'inégalite $R_{S+T} \geqslant \min(R_S, R_T)$ avec égalité si $R_S \neq R_T$;*

(ii) *$R_{ST} \geqslant \min(R_S, R_T)$;*

4. On notera $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ la série de nombres complexes pour la distinguer de la série formelle $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$.

(iii) $R_{S'} = R_S$.

Preuve de l'assertion ((iii)). — Soit $C \in \mathbf{R}_+$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$|\alpha_n|^{1/n} \leqslant C$$

pour tout entier $n \geqslant N$; alors on obtient

$$((n+1)|\alpha_{n+1}|)^{1/n} \leqslant ((n+1)C^{n+1})^{1/n}$$

pour $n \geqslant N$. Comme $(n+1)^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log(n+1))$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et que $C^{1+\frac{1}{n}}$ converge vers C, On obtient l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}((n+1)\alpha_{n+1})^{1/n} \leqslant C.$$

Par conséquent, $R_S \geqslant R_{S'}$.

Inversement, supposons

$$((n+1)|\alpha_{n+1}|)^{1/n} < C$$

pour $n \geqslant N$. Alors

$$|\alpha_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \leqslant ((n+1)|\alpha_{n+1}|)^{\frac{1}{n+1}} < C^{\frac{n}{n+1}}$$

qui converge vers C quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}|\alpha_n|^{1/n} \leqslant C$$

ce qui prouve que $R_{S'} \leqslant R_S$ et donc l'égalité. □

II.3. Compléments sur les séries

On notera ici $\mathfrak{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble I. On utilisera le résultat suivant :

Proposition II.10. — *Soit I un enemble dénombrable et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes telle que l'ensemble*

$$\Big\{\sum_{j\in J}|u_j|, J \in \mathfrak{P}_f(I)\Big\}$$

est majoré. Alors il existe un unique nombre complexe s tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists J \in \mathfrak{P}_f(I), \forall K \in \mathfrak{P}_f(I), \quad J \subset K \Longrightarrow \left|s - \sum_{j\in K} u_j\right| < \varepsilon$$

Ce nombre complexe est noté $\sum_{i\in I} u_i$. En outre, pour toute bijection $\varphi : \mathbf{N} \to I$, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_{\varphi(n)}$ est convergente et sa somme vaut s.

Remarques II.11. — i) La dernière assertion résulte du fait que, comme φ est bijective, pour toute partie finie J de I, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que $J \subset \varphi(\{0, \dots, N\})$.

ii) Notons que pour vérifier l'hypothèse de la proposition, il suffit de trouver une bijection φ de $\mathbf{N}$ sur I telle que

$$\sum_{n \geqslant 0} |u_{\varphi(n)}|$$

converge.

Par contre, si on permute les termes de la série convergente $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ à l'aide d'une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, on peut obtenir des séries divergentes ou convergeant vers un nombre réel arbitraire.

II.4. Dérivabilité

Proposition II.12. — *Soit $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ une série formelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors l'application $f : B_{\mathbf{K}}(0, R) \to \mathbf{K}$ définie par $z \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$ est dérivable et sa dérivé est l'application définie par la série dérivée S'.*

Démonstration. — Soit $a \in B_{\mathbf{K}}(0, R)$. Soit $R' \in \mathbf{R}_+$ tel que $|a| < R' < R$ et soit $z \in B(0, R') - \{a\}$. Alors on a les égalités

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \frac{z^n - a^n}{z - a} = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} a^k z^{n-k}. \tag{2}$$

Mais on a également la majoration $\left|\sum_{k=0}^{n} a^k z^{n-k}\right| \leqslant (n+1) \max(|a|, |z|)^n \leqslant (n+1) R'^n$ Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} (n+1) |\alpha_{n+1}| R'^n$ converge, la série de fonctions apparaissant dans le terme de droite de (2) converge normalement. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait

$$\forall z \in B_{\mathbf{K}}(0, R') - \{a\}, \qquad \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} a^k z^{n-k} \right| < \varepsilon$$

et, pour $z = a$,

$$\left| \sum_{n \geqslant 0} (n+1) \alpha_{n+1} a^n - \sum_{n=0}^{N} (n+1) \alpha_{n+1} a^n \right| < \varepsilon$$

Comme la somme $\sum_{n=0}^{N} \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} a^k z^{n-k}$ tend vers $\sum_{n=0}^{N} (n+1) \alpha_{n+1} a^n$ quand z tend vers a, on obtient que le quotient $\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ tend vers $\sum_{n \geqslant 0} (n+1) \alpha_{n+1} a^n$ quand z tend vers a. □

Corollaire II.13. — *Soit $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ une série formelle de rayon de convergence $R > 0$. Soit $a \in \mathbf{K}$. Alors l'application $f : B_{\mathbf{K}}(a, R) \to \mathbf{K}$ donnée par $z \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ est dérivable de dérivée donne par*

$$f'(z) = \sum_{n \geqslant 0} (n+1)\alpha_{n+1}(z-a)^n$$

pour tout $z \in B(a, R)$.

Corollaire II.14. — *On conserve les notations et hypothèses du corollaire II.13. Alors l'application f est indéfiniment dérivable en a et $\alpha_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.*

La preuve se fait par récurrence sur n.

II.5. Fonctions analytiques. — On rappelle que le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition II.15. — Soit U un ouvert de $\mathbf{K}$, soit $f : U \to \mathbf{K}$ une application et soit $a \in U$. On dit que f est *analytique en a*, s'il existe une série entière $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tels que

$$\forall z \in B_{\mathbf{K}}(a, r), \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n.$$

On dira que l'application est *analytique* si elle est analytique en tout point de l'ouvert U.

Remarque II.16. — Par le corollaire II.14, une application analytique est indéfiniment dérivable. Nous verrons à la fin de ce paragraphe un contre-exemple à la réciproque lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Théorème II.17. — *Si $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n \in \mathbf{K}[[T]]$ est une série formelle à coefficients dans $\mathbf{K}$ dont le rayon de convergence R est strictement positif, alors pour tout $a \in \mathbf{K}$, la fonction $f : B_{\mathbf{K}}(a, R) \to \mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ est analytique.*

Démonstration. — Il résulte de la définition qu'une application $f : U \to \mathbf{K}$ est analytique en $b \in U$ si et seulement si l'application $z \mapsto f(z-a)$ est analytique en $b-a$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $a = 0$. Soit $b \in B(0, R)$ et soit $r > 0$ tel que $|b| + r < R$. On a en particulier l'inclusion $B(b, r) \subset B(0, R)$. Soit $z \in B(b, r)$. La définition de f et la formule du binôme de

Newton fournissent les égalités

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-b+b)^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{p+q=n} \alpha_n \frac{n!}{p!q!} b^p (z-b)^q \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{p+q=n} \alpha_{p+q} \frac{(p+q)!}{p!q!} b^p (z-b)^q
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Mais la série formelle $\sum_{p\in\mathbf{N}}(p+q)\cdots(p+1)\alpha_{p+q}z^p$ est la série formelle $S^{(q)}$ obtenue en dérivant q fois la série S. Donc son rayon de convergence est également R. Cela nous permet de poser

$$\beta_q = \frac{1}{q!}\sum_{p\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{p!}\alpha_{p+q} b^p.$$

Les majorations

$$\sum_{p+q=n} |\alpha_n| \frac{n!}{p!q!} |b^p (z-b)^q| = |\alpha_n|(|b|+|z-b|)^n \leqslant |\alpha_n|(|b|+r)^n$$

et $|b|+r<R$ impliquent que la somme (3) converge absolument et, compte tenu de la proposition II.10, on obtient l'égalité

$$f(z) = \sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p\geqslant 0}\frac{(p+q)!}{p!q!}\alpha_{p+q}b^p\right)(z-b)^p = \sum_{q\geqslant 0}\beta_q z^q. \qquad \square$$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent, on obtient le résultat suivant

Notation II.18. — Avec les notations de la définition II.15, si f est analytique, alors elle est indéfiniment dérivable et en tout point a de son ouvert de définition U la série formelle S en a est la série

$$S = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} T^n.$$

Cette série s'appelle le *développement de Taylor en a*, on la note $\mathrm{DT}_a(f)$.

Rappelons que sur $\mathbf{R}$,il existe des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, indéfiniment dérivables, telles que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} T^n$ a un rayon de convergence strictement positif en tout $a \in \mathbf{R}$

mais qui ne sont pas analytiques : on peut ainsi considérer l'application donnée par

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0, \end{cases} \tag{4}$$

dont le graphe est dessiné dans la figure 4. Par construction, cette application est indéfinement

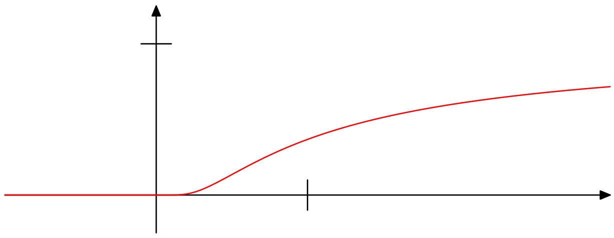

FIGURE 4. Fonction indéfiniment dérivable

dérivable en tout nombre $a \neq 0$. Mais, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, l'égalité

$$t^{-n}e^{-1/t} = \exp\left(n \log\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right)$$

implique que ce nombre tend vers 0 quand t tend vers 0. Par conséquent $f(t) = o_{t \to 0}(t^n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc l'application f est indéfiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La série associée à f en 0 est donc la série nulle, or $f(t) > 0$ pour $t > 0$, ce qui démontre que f n'est pas analytique.

II.6. Principe des zéros isolés

***Théorème II.19* (Principe des zéros isolés).** — *Soit U un ouvert de* $\mathbf{K}$. *Soit $f : U \to \mathbf{K}$ une fonction* analytique *Soit $a \in U$, alors deux cas sont possibles :*

— *Soit $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et alors il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\forall z \in B(a, r), \quad f(z) = 0;$$

— *Soit il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\forall z \in B(a, r) - \{a\}, \quad f(z) \neq 0.$$

Démonstration. — Par le paragraphe précédent, il existe $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} T^n$ a un rayon de convergence $R > r_0$ et

$$\forall z \in B(a, r_0), \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n.$$

Si $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, il en résulte que l'application f est nulle sur $B(a, r_0)$. Dans le cas contraire, posons $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et

$$n_0 = \min\{n \in \mathbf{N} \,|\, f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

On peut alors écrire

$$\forall z \in B(a, r_0), \quad f(z) = (z-a)^{n_0}(\alpha_{n_0} + g(z-a))$$

où $g(z) = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_{n+n_0} z^n$ pour $z \in B(0, r_0)$. L'application g est continue et $g(0) = 0$. Comme $\alpha_{n_0} \neq 0$, on peut choisir un nombre réel $r \in]0, r_0[$ tel que

$$\forall z \in B(0, r), \quad |g(z)| < |\alpha_{n_0}|$$

Donc, pour $z \in B(a, r)$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z-a|^{n_0}|\alpha_{n_0}|\left|1 + \frac{1}{\alpha_{n_0}} g(z-a)\right| \\ &\geqslant |z-a|^{n_0}|\alpha_{n_0}|\left|1 - \frac{1}{|\alpha_{n_0}|}|g(z-a)|\right|. \end{aligned}$$

Mais comme $\frac{1}{|\alpha_{n_0}|} g(z-a) < 1$ pour $z \in B(a, r)$, on obtient que $|f(z)| > 0$ pour $z \in B(a, r) - \{a\}$. □

En combinant ce théorème avec les notions topologiques décrites en appendice dans les définitions A1.11 et A2.8, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire II.20. — *Soit U un ouvert* connexe *de $\mathbf{K}$ et soit f une fonction non identiquement nulle analytique sur U, alors l'ensemble de ces zéros*

$$Z(f) = \{\, z \in \mathbf{K} \,|\, f(z) = 0 \,\}$$

est une partie localement finie de U.

Démonstration. — Tout d'abord notons que

$$\{\, a \in U \,|\, \mathrm{DT}_a(f) = 0 \,\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{\, a \in U \,|\, f^{(n)}(a) = 0 \,\}.$$

Comme les applications $f^{(n)}$ est continue, les parties $\overset{-1}{f^{(n)}}(\{0\})$ sont fermées et donc l'ensemble ci-dessus est fermé comme intersection de fermés.

Par le théorème, c'est aussi un ouvert de U. Comme on a supposé f non nulle, cet ensemble est distinct de U. Comme U est connexe, il est vide.

D'après l'alternative du théorème, l'ensemble $Z(f)$ est discret. Comme f est continue, il est également fermé *dans* U. Par la proposition et définition A2.8, cela signifie qu'il est localement fini dans U. □

***Corollaire II.21* (Principe du prolongement analytique). —** *Soit U un ouvert* connexe *de* $\mathbf{K}$. *Soient f et g des applications analytiques sur U. Si une des deux conditions suivantes est vérifiée*

(i) $\exists a \in U, \quad \mathrm{DT}_a(f) = \mathrm{DT}_a(g)$,

(ii) *L'ensemble $\{ z \in U \mid f(z) = g(z) \}$ n'est pas localement fini dans U,*

alors $f = g$.

Démonstration. — Tout d'abord l'assertion (i) implique (ii). En effet, si $\mathrm{DT}_a(f-g) = 0$, alors il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f_{|B(a,r)} = g_{|B(a,r)}$.

Si l'assertion (ii) est vérifiée, alors par le corollaire A2.8 appliqué à $f-g$, l'application $f-g$ est l'application constante nulle. □

***Corollaire II.22.* —** *Soit U un ouvert* connexe *de* $\mathbf{C}$. *Soit $Z \subset U$ une partie qui n'est pas localement finie dans U. Soit $f : Z \to \mathbf{K}$ une application. alors il existe* au plus *une application analytique $\tilde{f}$ sur U qui prolonge f* (i.e. $\tilde{f}_{|Z} = f$).

***Remarque II.23.* —** Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction analytique et soit $a \in U$. Soit R le rayon de convergence de $\mathrm{DT}_a(f)$, la fonction $g : B(a,R) \to \mathbf{C}$ donnée par

$$z \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

coïncide avec f sur un disque $B(a,r)$ centré en a et donc les applications f et g coïncident sur un ensemble qui n'est pas localement fini. Si $B(a,R) \cap U$ est connexe, alors f et g coïncide sur cet ensemble ce qui permet d'étendre f à l'ouvert $U \cup B(a,R)$. Dans certains cas, cela permet d'étendre une fonction analytique le long d'une courbe. Nous reviendrons là-dessus ultérieurement.

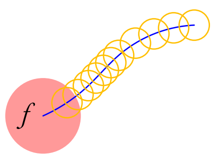

FIGURE 5. Prolongement analytique

Par contre, si $B(a,R) \cap U$ n'est pas connexe les fonctions f et g peuvent ne pas coïncider sur cet ensemble (*cf.* figure 6).

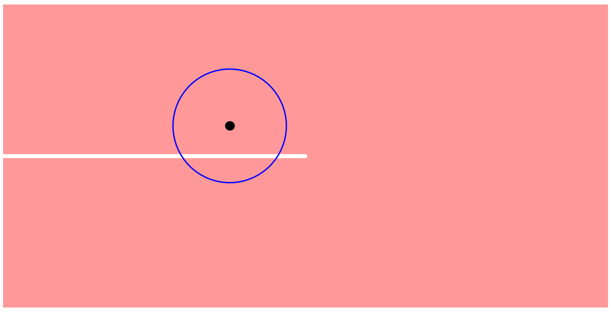

FIGURE 6. Non unicité des extensions

***Corollaire II.24* (Intégralité de l'algèbre des fonctions analytiques)**
Soit U un ouvert connexe *de* $\mathbf{K}$*. Soient f et g des fonctions analytiques sur U. Si fg est la fonction constante nulle alors il en est de même de f ou de g.*

Cela ne vaut pas pour les fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. En reprenant la fonction définie dans (4) et en notant $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $t \mapsto f(-t)$, on a que $fg = 0$ sans que f ou g ne soit nulle.
De même le résultat ne vaut plus si l'ensemble n'est pas connexe (exercice II.1).

Preuve du corollaire II.24. — La réunion de deux ensembles localement finis est localement finie (exemple A2.9 ii)) et $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. □

II.7. Détermination principale du logarithme

Rappel II.25. — *La série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n!} T^n$ a un rayon de convergence infini. L'application* exponentielle $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *est* définie *par $z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ elle vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\forall a, b \in \mathbf{C}, \quad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ *;*

b) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *pour $z \in \mathbf{C}$;*

c) $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$ *pour $z \in \mathbf{C}$;*

d) $\exp(z) = \exp(z')$ *si et seulement si* $\exists k \in \mathbf{Z}, \quad z - z' = 2k\pi \mathrm{i}$.

Remarque II.26. — Autrement dit, exp est un morphisme de groupes de $\mathbf{C}$ muni de l'addition vers $\mathbf{C}^*$ muni de la multiplication et $\operatorname{Ker}(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbf{Z}$.

Proposition II.27. — *La fonction exponentielle est holomorphe sur* $\mathbf{C}$ *et* $\exp' = \exp$.

Cette proposition découle de la dérivabilité d'une fonction définie par une série entière (proposition II.12).

Remarque II.28. — Cela donne d'autres exemples de fonctions holomorphes comme cosinus et sinus compte tenu des formules :

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

pour $z \in \mathbf{C}$. De même la fonction tangente définie par $z \mapsto \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{C} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\}$.

Proposition et définition II.29. — *Il existe une unique fonction continue*

$$\mathrm{Log} : \mathbf{C} -]-\infty, 0] \to \mathbf{C}$$

telle que

(i) $\mathrm{Log}(1) = 0$ *;*

(ii) $\exp \circ \mathrm{Log} = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.

On l'appelle la détermination principale du logarithme. *Cette application est holomorphe sur son domaine de définition, de dérivée* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *et au voisinage de* 1*, elle s'écrit :*

$$\forall z \in B(0,1), \quad \mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}.$$

Démonstration. — Dans cette preuve, on note $U = \mathbf{C} -]-\infty, 0]$.

Unicité. Notons tout d'abord que l'ouvert U est connexe (et même étoilé) car pour tout $z \in U$ le segment $[1, z]$ est contenu dans U. Si les applications f et g conviennent, alors, par la condition ((ii)) et les propriétés de l'exponentielle, $\exp \circ (g - f)$ est l'application constante nulle, et donc $g - f$ est une application de $\mathbf{C}$ à valeurs dans $2\pi\mathrm{i}\mathbf{Z}$ qui est une partie discrète de $\mathbf{C}$. Comme U est connexe, l'application est constante. Or $g(1) = 0 = f(1)$. Donc $g = f$.

Existence. L'existence est enseignée en terminale : L'application de U dans $\mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \log(|z|) + \mathrm{Arg}(z)\mathrm{i}$ où $\mathrm{Arg} : U \to]-\pi, \pi[$ est l'application argument est continue et

$$\exp\big(\log(|z|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)\big) = z$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Holomorphie. L'application Log est holomorphe par le théorème d'inversion locale (théorème I.18) puisque

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \exp'(z) = \exp(z) \neq 0.$$

En outre la dérivée est donnée par

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{\exp'(\mathrm{Log}(z))} = \frac{1}{\exp(\mathrm{Log}(z))} = \frac{1}{z}$$

pour tout $z \in U$. Pour tout $z \in B(0,1)$, l'égalité

$$\frac{-1}{1-z} = -\sum_{n\geqslant 0} z^n$$

implique que $\mathrm{Log}(1-z)$ et l'application $z \mapsto -\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ ont même dérivée sur $B(0,1)$. Comme ces fonctions coïncident en 1, elles sont égales. $\square$

Exercices

Dans les exercices $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice II.1. On rappelle qu'un anneau A est intègre s'il est commutatif, non nul et que

$$\forall a, b \in A, \quad ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Démontrer que l'anneau des fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbf{K}$ est intègre si et seulement si l'ouvert U est non vide et connexe.

Exercice II.2 (Fractions rationnelles). Soit f une fraction rationnelle. Démontrer que f est développable en série entière hors des pôles sur un rayon de convergence à décrire.

Exercice II.3 (Nombres de Catalan). Pour tout n, soit C_n le nombre de parenthésages possibles pour une suite de $n+1$ termes ainsi pour $n = 0$ ou $n = 1$, il n'y a qu'un parenthésage possible, mais pour $n = 2$, il y en a deux :

$$a(bc) \quad \text{ou} \quad (ab)c.$$

On note $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} C_n T^n$ la série formelle correspondante.

1. Justifier la formule
$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$
2. Démontrer que $zS^2 = S - 1$.
3. En déduire une expression de C_n en termes de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Existe-t-il une fonction holomorphe f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0 tel que $zf^2 = f - 1$?
5. Démontrer que la série S a un rayon de convergence non nul.

Exercice II.4 (Nombres de Bell). Notons B_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$. Par définition, $B_0 = 1$. Soit S la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{B_n}{n!} T^n$ appelée *série génératrice exponentielle* de la suite $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

1. Démontrer que S est solution d'une équation différentielle dans $\mathbf{C}[[T]]$, c'est-à-dire d'une équation faisant intervenir les dérivées de S.
2. Donner une expression de B_n en termes de n.
3. Prouver que la série S a un rayon de convergence strictement positif.
4. Quelle équation vérifie la fonction analytique définie par S.

Exercice II.5 (Théorème d'inversion locale). On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé complet. L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach :

Théorème II.30. — *Soient E et F des espaces de Banach de normes respectives $||\cdot||_E$ et $||\cdot||_F$. Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\mathrm{d}f_a : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans F. Il existe alors un ouvert U' de U contenant a tel que $f(U')$ est un ouvert de F et que l'application $f_{|U'} : U' \to f(U')$ donnée par $u \mapsto f(u)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire bijective et dont la réciproque est également de classe $\mathscr{C}^1$).*

1. Démontrer que l'on peut se ramener au cas où $E = F$, $a = f(a) = 0$ et $\mathrm{d}f_a = \mathrm{Id}_E$.
2. Démontrer qu'il existe un $r > 0$ tel que tout élément de $\overline{B}(0, \frac{r}{2})$ a un unique antécédent dans $\overline{B}(0,r)$. (Indication : on pourra considérer l'application $\varphi_y(x) = x + (y - f(x))$. Puis trouver un $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(0,r)$, φ_y est $\frac{1}{2}$-contractante.)
3. Conclure.

Exercice II.6 (Principe des zéros isolés). Rappeler le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques. Trouver toutes les fonctions analytiques sur $\mathbf{C}$ telles que l'on ait

$$f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice II.7 (Rappels sur l'exponentielle complexe). Rappelons que

$$\exp(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Démontrer les relations suivantes

1. $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{C}$;
2. $\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right)$ pour $z \in \mathbf{C}$;
3. $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$ pour $z \in \mathbf{C}$.

Exercice II.8 (Autour du logarithme complexe). Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$. Un *logarithme* sur Ω est une application continue $f : \Omega \to \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme sur le cercle unité.
2. Quel lien y a-t-il entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donné.

3. Démontrer que tout logarithme f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est holomorphe de dérivée $f'(z) = \frac{1}{z}$. Réciproquement démontrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, de dérivée $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est, à une constante près, un logarithme sur Ω.
4. Démontrer que l'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelconque.
5. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D qui ne s'annule pas. Démontrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $f = \exp(g)$.
6. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie $f \circ f = \exp$ (On pourra chercher à appliquer la question précédente à une telle fonction).

III. Intégrales de Cauchy

Dans ce chapitre nous abordons les propriétés spécifiques des fonctions holomorphes qui ne sont pas de simples généralisations des propriétés des fonctions d'une variable réelles.

III.1. Intégration complexe (première version). — La notion de chemin est défini en appendice (définition A1.16). Nous allons nous restreindre dans ce chapitre aux chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Définition III.1. — Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$.

Rappelons qu'une *subdivision* de l'intervalle $[a,b]$ est une famille $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de nombre réels avec $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ tels que

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = b.$$

Une application $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ telle qu'il existe une subdivision $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de $[a,b]$, dite *adaptée à* γ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une application $\gamma_i : [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \to \mathbf{C}$ continue, dérivable et dont la dérivée est continue telle que les restrictions de γ_i et γ à $]\lambda_{i-1}, \lambda_i[$ coïncident.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à γ et $\gamma_i : [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \to \mathbf{C}$ les applications de classe $\mathscr{C}^1$ induites par γ. Alors

a) La *longueur* de γ est le nombre réel

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} |\gamma_i'(t)| \mathrm{d}t;$$

b) Soit X une partie de $\mathbf{C}$ contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$, et soit $f : X \to \mathbf{C}$ une application continue. *L'intégrale complexe de f le long de* γ est le nombre complexe

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \mathrm{d}t.$$

Remarques III.2. — i) Dans cette définition, les chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux peuvent ne pas être continus. Dans la pratique, nous utiliserons surtout des applications continues et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. En particulier, rappelons que les chemins sont continus, donc un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbf{C}$ est une application continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$.

ii) Avec les notations de la définition, si $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ est une subdivision adaptée à une application $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ, alors l'application γ_i est l'unique application continue qui prolonge la restriction de γ à $]\lambda_{i-1},\lambda_i[$.

iii) Par abus de langage, on écrira souvent $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$ pour

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\mathrm{d}t$$

iv) Soit $\gamma : [a,c] \to \mathbf{C}$ est une application $\mathscr{C}^1$ par morceaux, soit $b \in]a,c[$, alors

$$l(\gamma) = l(\gamma_{|[a,b]}) + l(\gamma_{|[b,c]}).$$

Si, en outre, $f : X \to \mathbf{C}$ est une application continue avec $\mathrm{Im}(\gamma) \subset X \subset \mathbf{C}$, alors

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{|[a,b]}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{|[b,c]}} f(z)\mathrm{d}z.$$

v) Si $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ est *continu* et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on peut prouver (*cf.* figure 7) que

$$l(\gamma) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n}|\gamma(\lambda_i)-\gamma(\lambda_{i-1})|,\ (\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \text{ subdivision de } [a,b]\right\}.$$

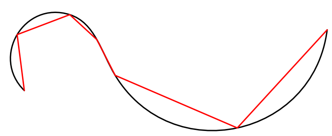

Figure 7. Longueur d'un chemin

Proposition III.3. — *Avec les notations de la définition,*

a) *L'application de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(X,\mathbf{C})$ des applications continues de X dans $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ donnée par $f \mapsto \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ est une forme linéaire.*

b) *Si l'application continue $f : X \to \mathbf{C}$ vérifie*

$$\forall z \in X, \quad |f(z)| \leqslant M$$

alors

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml(\gamma).$$

c) *On suppose que* γ *est continu et* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux. Si* U *est un ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant* $\mathrm{Im}(\gamma)$ *et si* $f : U \to \mathbf{C}$ *est holomorphe, alors*

$$\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(b) - f(a).$$

Démonstration. — L'assertion a) résulte de la définition de l'intégrale complexe.

L'assertion b) résulte des majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} |f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant Ml(\gamma).\end{aligned}$$

Démontrons maintenant l'assertion c). Sous les hypothèses faites, γ_i est simplement la restriction de γ à $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Cela donne les égalités :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z &= \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} (f\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n f(\gamma(\lambda_i)) - f(\gamma(\lambda_{i-1})) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Proposition III.4. — *On conserve les notations de la définition. Soit* $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *une application continue, de classe* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux, strictement croissante et bijective dont la réciproque est également de classe* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\mathrm{d}z.$$

Démonstration. — Quitte à découper les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ à l'aide de subdivisions, la remarque III.2 iv) permet de se ramener au cas où φ et γ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Mais dans ce cas, on a les égalités :

$$(\gamma\circ\varphi)'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) = \gamma'(\varphi(t))|\varphi'(t)|$$

et la formule pour le changement de variables $t' = \varphi(t)$ s'écrit $\mathrm{d}t' = |\varphi'(t)|\mathrm{d}t$. □

Remarque III.5. — Intuitivement, la dernière proposition signifie que $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ ne dépend pas de la façon dont $\mathrm{Im}(\gamma)$ est paramétré, mais seulement du sens dans lequel on parcourt $\mathrm{Im}(\gamma)$. Par abus de langage, si γ est injectif et qu'il n'y a pas de risque de confusion sur le sens de parcours, il nous arrivera de noter

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Par exemple, pour $a\in\mathbf{C}$ et $r\in\mathbf{R}_+^*$, on note

$$C(a,r) = \{z\in\mathbf{C} \mid |z-a| = r\}$$

le cercle de centre a et de rayon r. Pour toute fonction $f : C(a,r)\to\mathbf{C}$ continue,

$$\int_{C(a,r)} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

où $\gamma : [0,1]\to\mathbf{C}$ est donnée par $t\mapsto a+re^{2\pi t i}$.

Par contre, la valeur de l'intégrale dépend du sens de parcours : si $\gamma : [0,1]\to\mathbf{C}$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, pour l'application $\varphi : [0,1]\to[0,1]$ donnée par $t\mapsto 1-t$,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\mathrm{d}z$$

pour toute application continue $f : \mathrm{Im}(\gamma)\to\mathbf{C}$.

Pour la proposition suivante, nous utilisons les opérations sur les chemins définies à la page 116.

Proposition III.6. — *Soit X une partie de $\mathbf{C}$ et $f : X\to\mathbf{C}$ une application continue.*

a) *Soient γ_1 et γ_2 des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux et juxtaposables dans X, alors*

$$\int_{\gamma_1*\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z;$$

b) *Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans X, alors*

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z.$$

Démonstration. — Pour la première assertion, la remarque III.2 iv) et la proposition III.4 nous donnent les égalités

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{(\gamma_1*\gamma_2)_{|[0,1/2]}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{(\gamma_1*\gamma_2)_{|[1/2,1]}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Pour la seconde assertion, la définition du chemin inverse nous donne

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(1-t)\times(-\gamma'(1-t))\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t')\gamma'(t')\mathrm{d}t = -\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z,$$

où l'on a fait le changement de variables $t' = 1-t$. □

III.2. Formule de CAUCHY

***Théorème III.7* (Formule intégrale de CAUCHY).** — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Alors*

$$\forall b \in B(a,r), \quad f(b) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Remarque III.8. — La formule des résidus nous fournira une généralisation de cette formule, qui s'applique à d'autres courbes que des cercles.

La principale difficulté de la preuve est de démontrer qu'on peut se ramener à un cercle de rayon arbitrairement petit centré en b. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme III.9. — *On conserve les notations du théorème. Soit $r' \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(b,r') \subset B(a,r)$. Alors*

$$\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_{C(b,r')} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Démonstration. — **Première étape.** Soit g la fonction définie sur $U - \{b\}$ par

$$z \mapsto \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}(z-b)}$$

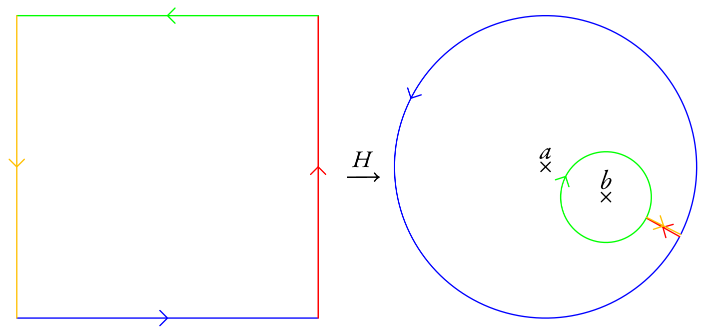

Figure 8. Chemin initial

L'application g est holomorphe sur $U - \{b\}$. Pour commencer nous allons écrire la différence entre les deux intégrales comme une intégrale le long d'un chemin qui parcourt le grand cercle dans le sens trigonométrique et le petit cercle dans le sens inverse.

Pour cela, posons $\theta_1 = \operatorname{Arg}(b-a)$ si $b \neq a$ et $\theta_1 = 0$ si $a = b$ et notons $H : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ l'application définie par

$$(t,u) \longmapsto u\left(b + r'e^{i(\theta_1+2\pi t)}\right) + (1-u)\left(a + re^{i(\theta_1+2\pi t)}\right)$$

Pour $u \in [0,1]$, on peut alors considérer l'application $H(\bullet, u) : [0,1] \to \mathbf{C}$ donnée par $t \mapsto H(t,u)$. Alors

$$(5) \qquad \int_{C(a,r)} g(z)\mathrm{d}z = \int_{H(\bullet,0)} g(z)\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad \int_{C(b,r')} g(z)\mathrm{d}z = \int_{H(\bullet,1)} g(z)\mathrm{d}z.$$

D'autre part on a l'égalité $H(0,u) = H(1,u)$ pour tout $u \in [0,1]$ ce qui nous donne l'égalité

$$(6) \qquad \int_{H(0,\bullet)} g(z)\mathrm{d}z = \int_{H(1,\bullet)} g(z)\mathrm{d}z.$$

Maintenant on considère un chemin σ_0 dans $[0,1]^2$ qui parcourt le bord du carré dans le sens trigonométrique, on peut l'écrire de la façon suivante :

$$t \longmapsto \begin{cases} (4t, 0) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ (1, 4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}, \\ (1-(4t-2), 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ (0, 1-(4t-3)) & \text{si } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Le chemin composé $H \circ \sigma_0$ n'est rien d'autre que la juxtaposition de chemins

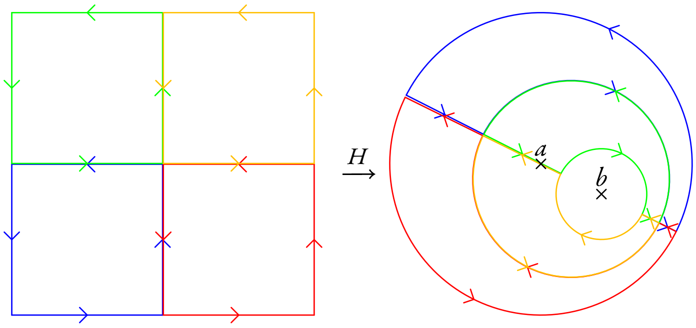

FIGURE 9. Quatre chemins

$$\Big(H(\bullet,0)*H(1,\bullet)\Big)*\Big(\overline{H(\bullet,1)}*\overline{H(0,\bullet)}\Big).$$

Donc par les égalités (5) et (6), il résulte de la proposition III.6 l'égalité

$$\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z = \int_{C(a,r)} g(z)\mathrm{d}z - \int_{C(b,r)} g(z)\mathrm{d}z.$$

Deuxième étape : subdivision. Nous allons maintenant découper le carré $C_0 = [0,1]^2$ en quatre carrés

$$C_{0,0} = \Big[0,\frac{1}{2}\Big]^2, \quad C_{0,1} = \Big[0,\frac{1}{2}\Big]\times\Big[\frac{1}{2},1\Big], \quad C_{0,2} = \Big[\frac{1}{2},1\Big]\times\Big[0,\frac{1}{2}\Big] \quad \text{et} \quad C_{0,3} = \Big[\frac{1}{2},1\Big]^2.$$

Et, comme ci-dessous, on construit pour $i \in \{0,1,2,3\}$ un chemin $\sigma_{o,i}$ qui suit le bord de $C_{0,i}$ dans le sens trigonométrique. On alors l'égalité

$$\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{3}\int_{H\circ\sigma_{0,i}} g(z)\mathrm{d}z.$$

En effet, lorsqu'on parcourt successivement chacun des lacets $\sigma_{0,i}$, les segments du bord du carré C_0 sont parcourus une fois dans le même sens que pour le lacet σ_0 tandis que les segments qui contiennent le point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sont parcourus deux fois dans des sens opposés.

Par conséquent, on peut choisir $i \in \{0,1,2,3\}$ tel que

$$\left|\int_{H\circ\sigma_{0,i}} g(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z\right|.$$

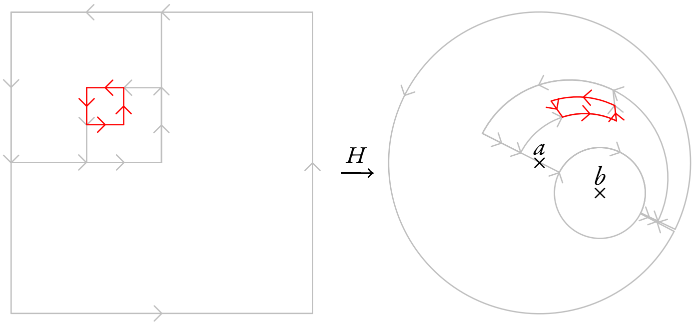

Figure 10. Découpage itéré

On pose alors $C_1 = C_{0,i}$ et $\sigma_1 = \sigma_{0,i}$. On itère alors le procédé de façon à obtenir une suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de carrés de la forme

$$C_n = \left[\frac{k_n - 1}{2^n}, \frac{k_n}{2^n}\right] \times \left[\frac{l_n - 1}{2^n}, \frac{l_n}{2^n}\right]$$

avec $k_{n+1} \in \{2k_n - 1, 2k_n\}$ et $l_{n+1} \in \{2l_n - 1, 2l_n\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ de sorte que si σ_n est un chemin qui suit le bord de C_n,

$$\left|\int_{H\circ\sigma_n} g(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{1}{4^n}\left|\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z\right|.$$

Troisième étape : majoration de l'intégrale. Notons $D_n = H(C_n)$ et considérons son *diamètre*

$$\delta(D_n) = \max_{x,y\in D_n} |x-y|.$$

Comme H est différentiable et que se différentielle est contine, il résulte de l'inégalité des accroissements finis qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\delta(D_n) \leqslant C\delta(C_n) = C\frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

et

$$l(H\circ\sigma_n) \leqslant Cl(\sigma_n) \leqslant \frac{4C}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $z_n \in D_n$, comme $z_q \in D_q \subset D_p$ si $q \geqslant p$, on obtient que

$$|z_q - z_p| \leqslant \frac{C\sqrt{2}}{2^{\min(p,q)}}.$$

Donc cette suite est une suite de Cauchy et donc convergente. Soit l sa limite. Comme $z_n \in D_p$ pour $n \geqslant p$ et que $D_p = H(C_p)$ est compact et donc fermé, $l \in D_p$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. Comme le diamètre de D_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on obtient que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n = \{l\}$.

Comme l'application g est holomorphe sur $U - \{b\} \supset D_n$, et donc en l, on peut écrire

$$g(z) = g(l) + g'(l)(z-l) + o_{z\to l}(|z-l|). \tag{7}$$

Mais si $\alpha \in \mathbf{C}$ et $\gamma : [u, v] \to \mathbf{C}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\int_\gamma \alpha \mathrm{d}z = \alpha \int_u^v \gamma'(t)\mathrm{d}t = \alpha(\gamma(v) - \gamma(u)).$$

De méme,

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \int_u^v \gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_u^v (\gamma^2)'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\gamma(v)^2 - \gamma(u)^2\right).$$

Comme $H\circ\sigma_n$ est un lacet, on obtient que

$$\int_{H\circ\sigma_n} (g(l) + g'(l)(z-l))\mathrm{d}z = 0.$$

Il reste donc à majorer le terme de reste. Mais par la formule (7), si on note $u : U - \{b\} \to \mathbf{C}$ l'application $z \mapsto g(z) - g(l) - g'(l)(z-l)$, on obtient que $u(z) = o_{z\to l}(|z-l|)$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $|z-l| < \eta$ implique $|u(z)| \leqslant \varepsilon|z-l|$. Comme $\delta(D_n) \leqslant C\frac{\sqrt{2}}{2^n}$, on en déduit qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in D_n$, on ait $|u(z)| \leqslant C\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2^n}$. Pour un tel n, on obtient

$$\left|\int_{H\circ\sigma_n} u(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{C\sqrt{2}\varepsilon}{2^n} l(\sigma_n) \leqslant \frac{C\sqrt{2}\varepsilon}{2^n} \times \frac{4C}{2^n} \leqslant \frac{4\sqrt{2}C^2\varepsilon}{4^n}.$$

Conclusion. En combinant les inégalités obtenues, on obtient que, pour $n \geqslant N$,

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2}C\varepsilon}{4^n}$$

Donc

$$\left|\int_{H\circ\sigma_0} g(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 4\sqrt{2}C\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. L'égalité du lemme en résulte. $\square$

Remarque III.10. — Il est important de noter que cette preuve ne suppose pas la continuité de la dérivée de f.

Démonstration de la formule de Cauchy. — On applique le lemme avec un r' qui va tendre vers 0. Pour $z \in B(b,r') - \{b\}$, on dispose d'une majoration de la forme

$$\left|\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(b)}{z-b} - f'(b)\right| \leqslant \varepsilon(r')$$

avec $\varepsilon(r')$ qui tend vers 0 quand r' tend vers 0. En particulier, il existe $C \in \mathbf{R}_+^*$ et $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tels que pour tout $r' < r_0$ et tout $z \in C(b,r')$, on ait

$$\left|\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(b)}{z-b}\right| \leqslant C.$$

On en déduit la majoration

$$\left|\int_{C(b,r')} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} - \int_{C(b,r')} \frac{f(b)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}\right| \leqslant \frac{C}{2\pi} l(C(b,r')) = Cr'$$

qui tend vers 0 lorsque r' tend vers 0. Enfin on calcule la valeur pour une application constante :

$$\int_{C(b,r')} \frac{f(b)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{f(b)}{r'e^{2\pi t\mathrm{i}}} 2\pi\mathrm{i}r'e^{2\pi t\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}} = f(b). \qquad \square$$

Il ne faut pas oublier le facteur $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}$. Le bon moyen si vous avez un doute sur la valeur du facteur est de vérifier pour la fonction constante de valeur 1 :

$$\int_{C(b,r)} \frac{1}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{r2\pi\mathrm{i}e^{2\pi t\mathrm{i}}}{re^{2\pi t\mathrm{i}}} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

Le cas $b = a$ nous donne le cas particulier qui suit

Définition III.11. — Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $f : C(a,r) \to \mathbf{C}$ une application continue. La valeur moyenne de f sur le cercle est définie par

$$\mathbf{E}_{C(a,r)}(f) = \int_0^1 f(a + re^{2\pi t\mathrm{i}})\mathrm{d}t.$$

Corollaire III.12. — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset U$. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors*

$$f(a) = \mathbf{E}_{C(a,r)}(f).$$

Démonstration. — La formule intégrale de CAUCHY donne l'égalité

$$f(a) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{f(a+re^{2\pi t\mathrm{i}})}{re^{2\pi t\mathrm{i}}} 2\pi\mathrm{i} re^{2\pi t\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}} = \mathbf{E}_{C(a,r)}(f). \qquad \square$$

III.3. Analyticité. — Le résultat suivant est sans doute un des résultats qui illustre le mieux la différence entre les fonctions d'une variable réelle et les fonctions d'une variable complexe.

Théorème III.13. — *Une fonction d'un ouvert de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}$ *est holomorphe si et seulement si elle est analytique.*

Démonstration. — On a déjà vu qu'une application analytique est holomorphe, la difficulté est de démontrer la réciproque. qui va être l'objet de la proposition suivante.

Définition III.14. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une application continue. On dit que l'application f *vérifie la formule intégrale de Cauchy* si

$$\forall a \in U, \forall r \in \mathbf{R}_+^*, \qquad \overline{B(a,r)} \subset U \Longrightarrow \forall b \in B(a,r), \quad f(b) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Proposition III.15. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et* $f : U \to \mathbf{C}$ *une application continue qui vérifie la formule intégrale de Cauchy, alors elle est analytique.*

Démonstration. — Soit $a \in U$. Choisissons r_0 et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{B}(a,r_0) \subset U$ et $r < r_0$. Alors la formule de Cauchy donne en particulier

$$\forall z \in B(a,r_0), \quad f(z) = \int_{C(a,r_0)} \frac{f(z)}{u-z}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Mais on a le développement en séries entières

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-a)\left(1-\frac{z-a}{u-a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Par définition, pour $u \in C(a,r_0)$, on a $|u-a| = r_0$. Donc pour $z \in B(a,r)$, on a la majoration

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{r^n}{r_0^{n+1}},$$

où le majorant est le terme général d'une série convergente. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Comme $C(a,r_0)$ est compact dans $\mathbf{C}$, la fonction f atteint son maximum sur ce cercle, on peut donc poser

$$C = \max_{z \in C(a,r_0)} |f(z)| \in \mathbf{R}_+.$$

Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait la majoration

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{r^n}{r_0^n} < \frac{\varepsilon}{C+1}.$$

Pour un tel entier n, pour tout $z \in B(a,r)$ et tout $u \in C(a,r_0)$, on obtient la majoration

$$\left| \frac{1}{u-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r_0(C+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} (z-a)^n \int_{C(a,r_0)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi \mathrm{i}} \right| \\
&= \left| \int_{C(a,r_0)} f(u) \left(\frac{1}{u-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}} \right) \frac{\mathrm{d}u}{2\pi \mathrm{i}} \right| \\
&\leqslant C \frac{\varepsilon}{r_0(C+1)} \frac{2\pi r_0}{2\pi} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

On obtient en définitive l'égalité $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ pour $z \in B(a,r)$ où

$$\alpha_n = \int_{C(a,r_0)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi \mathrm{i}},$$

ce qui prouve que f est analytique en a. $\square$

Cette preuve nous donne un peu plus que le théorème :

Remarque III.16. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soient $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Soit $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n = \mathrm{DT}_a(f)$. Alors

a) Le rayon de convergence de S vérifie $R_S \geqslant r$ et

$$\forall z \in B(a,r), \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n;$$

b) (Formule intégrale de Cauchy, deuxième version)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}.$$

Corollaire III.17. — *Avec les notations de la remarque précédente,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{z\in C(a,r)} (|f(z)|).$$

Démonstration. — Cela résulte de la majoration

$$\left|\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}\right| \leqslant \frac{\sup_{z\in C(a,r)}(|f(z)|)}{r^{n+1}} \times \frac{2\pi r}{2\pi}. \qquad \square$$

***Corollaire III.18* (Formule de GUTZMAN).** — *On conserve les notations précédentes, alors*

$$\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2 r^{2n} = \mathbf{E}_{C(a,r)}(|f|^2).$$

Remarque III.19. — Si $\overline{B}(a,r) \subset U$, alors il existe $r' > r$ rel que $B(a,r') \subset U$. En effet sinon il exite une suite de points $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}-U$ tels que $|u_n - a|$ tend vers r quand n tend vers l'infini. En particulier, on peut choisir $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_n \in \overline{B}(a, r+1)$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $\overline{B}(a,r+1)$ est compacte, on peut extraire de la suite $(u_{n+N})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. Notons ℓ sa limite. Comme $\mathbf{C}-U$ est fermé, la limite ℓ appartient à ce fermé, autrement dit $\ell \notin U$. Mais par continuité du module, $|\ell - a| = r$, ce qui contredit l'hypothèse $\overline{B}(a,r) \subset U$.

Esquisse de la preuve de la formule de GUTZMAN. — La formule résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{C(a,r)}(|f|^2) &= \int_0^1 \left|f\left(a + re^{2\pi t \mathrm{i}}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n r^n e^{2\pi t \mathrm{i}}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} \overline{\alpha}_n r^n e^{-2\pi t \mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{p,q\geqslant 0} \alpha_p \overline{\alpha}_1 r^{p+q} \int_0^1 e^{2\pi(p-q)t\mathrm{i}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mais l'intégrale dans cette dernière somme est donnée par

$$\int_0^1 e^{2\pi(p-q)t\mathrm{i}} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \square$$

Corollaire III.20. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $a \in U$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset U$. Alors il existe $G \in \mathscr{H}(B(a,r))$ tel que $G' = f_{|B(a,r)}$.*

Démonstration. — Comme f est holomorphe et donc analytique, on pose $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n = \mathrm{DT}_a(f)$. Son rayon de convergence est supérieur ou égal à r. On définit alors $G : B(a,r) \to \mathbf{C}$ l'application définie par une primitive de cette série :

$$z \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

Alors $G' = f_{|B(a,r)}$. □

Exercices

Exercice III.1. On paramètre le cercle unité $\partial\mathbf{D}$ avec le chemin $\gamma : t \mapsto e^{2\pi t i}$.

1. Démontrer que toute fonction continue g sur $\partial\mathbf{D}$ satisfait l'égalité

$$\overline{\int_\gamma g(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}} = \int_\gamma \frac{\overline{g(z)}}{z^2}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

2. Démontrer que pour tout polynôme complexe $P \in \mathbf{C}[X]$ et tout nombre réel $r > 0$, on a

$$\int_{C(0,r)} \overline{P(z)}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = r^2\overline{P'(0)}.$$

Exercice III.2 (Intégrale de Fresnel). L'objectif de cet exercice est de prouver les égalités

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

1. On considère la fonction $f : z \mapsto \exp(-z^2)$. Démontrer que f est la dérivée d'une fonction $F \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$.

Pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$D_R = \{re^{\mathrm{i}\theta}, r \in [0,R], \theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\},$$

un huitième du disque de rayon R centré en 0, et ∂D_R son bord.

2. Démontrer que l'intégrale

$$\int_{\partial D_R} f(z)\mathrm{d}z$$

est nulle pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$.

3. Démontrer que l'intégrale de f sur l'intersection de ∂D_R avec le cercle de centre 0 et de rayon R tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
4. Déterminer l'intégrale de f sur la demi-droite réelle $\mathbf{R}_+$.
5. Conclure.

Exercice III.3 (Transformée de Fourier d'une gaussienne). Soit $\xi \in \mathbf{R}$, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi\xi x\mathrm{i}}\mathrm{d}x.$$

On pourra, pour cela, considérer l'intégrale de $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ sur le bord du domaine rectangulaire de sommets $-R$, R, $R + \mathrm{i}\xi$, $-R + \mathrm{i}\xi$ parcouru dans le sens trigonométrique.

IV. Quelques propriétés des applications holomorphes

IV.1. Théorème de Liouville

Définition IV.1. — Une application *entière* est une application holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Théorème IV.2 **(Liouville).** — *Une application entière et bornée est constante.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$ et $M \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |f(z)| \leqslant M.$$

Notons $\sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n T^n$ le développement de Taylor de f en 0. Le corollaire III.17, nous fournit les majorations

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{\sup_{z \in C(0,r)}(|f(z)|)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $r \in \mathbf{R}_+^*$. En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit que $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $f(z) = \alpha_0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. □

Corollaire IV.3 **(Théorème de D'Alembert–Gauss).** — *Le corps* $\mathbf{C}$ *est algébriquement clos : tout polynôme non constant à coefficients dans* $\mathbf{C}$ *admet au moins une racine dans* $\mathbf{C}$.

Démonstration. — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbf{C},\ P(z) \neq 0$. Alors la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \frac{1}{P}(z)$ est une application entière. Démontrons qu'elle est bornée. Comme le polynôme P est non nul, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ avec $\alpha_d \neq 0$. Par conséquent,

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\alpha_d z^d| - \sum_{k=0}^{d-1} |\alpha_k||z|^k.$$

Comme $\sum_{k=0}^{d-1} |\alpha_k||z|^k = o(|z|^d)$, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |z| \geqslant R \Longrightarrow |P(z)| \geqslant \frac{1}{2}|\alpha_d| R^d > 0.$$

Comme $\overline{B}(0,R)$ est compacte et l'application $z \longmapsto |P(z)|$ continue, elle atteint son minimum sur cette boule fermée, si bien que

$$\min_{z\in\overline{B}(0,R)} |P(z)| > 0.$$

Donc l'application entière f est majorée et donc constante. Donc le polynôme P est constant. □

On peut améliorer le théorème de Liouville de la façon suivante :

Proposition IV.4. — *Soit f une application entière.*

a) *Si $|f(z)| = o_{|z|\to+\infty}(|z|)$, alors l'application f est constante.*

b) *Si $|f(z)| = o_{|z|\to+\infty}(|z|^n)$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors f est une application polynomiale de degré $< n$.*

Démonstration. — Sous les hypothèses faites, on a les majorations

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{\sup_{z\in C(0,r)}(|f(z)|)}{r^k} = \frac{o(r^n)}{r^k}$$

et ce quotient tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini pour tout $k \geqslant n$. □

IV.2. Principe du maximum

***Théorème IV.5* (Principe du maximum, forme locale).** — *Soit U un ouvert* connexe *de* **C** *et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Si l'application $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors l'application f est constante.*

Démonstration. — Soit $M = |f(a)|$ le maximum de $|f|$. Rappelons que, par le théorème III.13, l'application f est analytique. Nous allons distinguer deux cas

Premier cas. Si $M = 0$, alors l'application f est nulle sur un disque centré en a. Comme U est connexe, par la proposition II.20, l'application f est l'application constante nulle.

Deuxième cas Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que f n'est pas constante. Il en résulte que $\mathrm{DT}_a f = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n$ n'est pas pas une série constante ce qui nous permet de définir l'entier

$$m = \min\{\, n \in \mathbf{N} - \{0\} \mid \alpha_n \neq 0 \,\}.$$

Comme $\alpha_0 \neq 0$ dans ce cas, au voisinage de a l'application f s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha_0 + \alpha_m (z-a)^m + o(|z-a|^m) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_0}(z-a)^m + o(|z-a|^m\right). \end{aligned}$$

Utilisons l'écriture exponentielle $\frac{\alpha_m}{\alpha_0} = \rho e^{i\theta}$ et prenons $z = a + te^{-i\frac{\theta}{m}}$ avec $t \in \mathbf{R}_+^*$. Alors, on obtient l'égalité

$$f(z) = \alpha_0(1 + \rho t^m + o(t^m)).$$

Par conséquent,

$$|f(z)| \geqslant |\alpha_0|(1 + \rho t^m - o(t^m)).$$

Mais ce nombre est $> |\alpha_0| = M$ pour t assez petit, ce qui contredit la définition de M. □

Remarque IV.6. — Notons que ce résultat pourrait aussi se démontrer en utilisant la formule de la moyenne. En effet, soit u un nombre complexe de module 1 tel que $|f(a)| = uf(a)$ et soit $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r_0) \subset U$ et

$$\forall z \in B(a, r_0), \quad |f(z)| \leqslant |f(a)|. \tag{8}$$

Il suffit de démontrer que l'application f est constante sur $B(a, r_0)$. Soit $r \in]0, r_0[$. La formule de la moyenne nous donne la deuxième égalité dans les égalités suivantes :

$$|f(a)| = uf(a) = \int_0^1 uf(a + re^{2\pi t i})\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 |f(a)| - uf(a + re^{2\pi t i})\mathrm{d}t = 0.$$

et, en prenant la partie réelle de cette expression,

$$\int_0^1 |f(a)| - u\mathfrak{R}(f(a + re^{2\pi t i}))\mathrm{d}t = 0.$$

Mais, par (8), la fonction dans l'intégrale est positive et continue. La nullité de l'intégrale implique donc la nullité de cette fonction, si bien que

$$\mathfrak{R}(f(z)) = f(a)$$

pour tout $z \in B(a, r_0)$. En appliquant à nouveau (8), on en déduit que $\mathfrak{I}(f(z)) = 0$ et $f(z) = f(a)$ pour $z \in B(a, r_0)$.

***Théorème IV.7* (Principe du maximum, forme globale).** — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+^*$ et une partie compacte $K \subset U$ telle que*

$$\forall z \in U - K, \quad |f(z)| \leqslant M.$$

Alors,

$$\forall z \in U, \quad |f(z)| \leqslant M.$$

Notons qu'on ne suppose plus U connexe dans cet enoncé, ce qui fait que nous avons besoin de la notion de composante connexe (définition A1.13) pour le prouver.

Preuve du théorème. — Comme K est compact et l'application $|f| : K \to \mathbf{R}$ continue, il existe $a \in K$ tel que
$$|f(a)| = \max_{z \in K}(|f(z)|).$$
On raisonne par l'absurde en supposant que $|f(a)| > M$. Alors
$$\forall z \in U, \quad |f(z)| \leqslant |f(a)|.$$
En particulie, $|f|$ admet un maximum local en a. Il en résulte que la restriction de f à la composante connexe C_a de a dans U est constante de valeur $f(a)$. En outre, comme U est ouvert et localement connexe, la partie C_a est un ouvert de $\mathbf{C}$. Mais, comme on a supposé $|f(a)| > M$, on obtient que $C_a \subset K \subset U$. Comme K est compact, il est borné et donc $C_a \neq \mathbf{C}$. On choisit donc un nombre complexe $b \in \mathbf{C} - C_a$ et on pose
$$t = \min(\{\, u \in [0,1] \mid (1-u)a + ub \notin C_a \,\}.$$
Soit $c = (1-t)a + tb$. La définition de t nous fournit les inclusions
$$[a,c] - \{c\} \subset C_a \subset K.$$
Comme K est compact et donc fermé, il en résulte que $c \in K$. De même $c \in \overline{C_a}$. Or $K \subset U$ donc $c \in U$. Donc $c \in \overline{C_a} \cap U$. Mais comme C_a est la composante connexe de a dans U, c'est un fermé de U et donc $C_a = \overline{C_a} \cap U$. On a donc obtenu que $c \in C_a$.

Mais, comme $b \notin C_a$, la définition de t nous assure qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'élements de $[0,1]$ qui converge vers t et telle que
$$(1-t_n)a + t_n b \in \mathbf{C} - C_a$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme C_a est ouverte dans U et donc dans $\mathbf{C}$, on obtient que $c \in \mathbf{C} - C_a$ ce qui contredit la conclusion du paragraphe précédent.

Donc on peut festoyer car on a obtenu que $|f(a)| \leqslant M$ ce qui prouve le principe du maximum global. □

IV.3. Automorphismes du disque unité. — Ce paragraphe va nous donner un exemple d'applications des résultats qui précèdent.

***Proposition IV.8* (Lemme de Schwarz).** — *On note* $\mathbf{D} = B(0,1) \subset \mathbf{C}$ *et*
$$\mathbf{U} = \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \,\}.$$
Soit $f \in \mathscr{H}(\mathbf{D})$. *On suppose que* $f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$ *et que* $f(0) = 0$ *Alors*

a) $\forall z \in \mathbf{D}, |f(z)| \leqslant |z|$;

b) $|f'(0)| \leqslant 1$.

De plus s'il existe $z \in \mathbf{D} - 0$ *tel que* $|f(z)| = |z|$, *ou si* $|f'(0)| = 1$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbf{U}$ *tel que*

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad f(z) = \alpha z.$$

Démonstration. — Soit $g : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ l'application donnée par

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0; \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Notons $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n T^n = \mathrm{DT}_0 f$. Son rayon de convergence est $\geqslant 1$. Alors g est l'application définie sur $\mathbf{D}$ par la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_{n+1} T^n$. L'application g est donc holomorphe sur $\mathbf{D}$. Soit $r \in]0, 1[$. Pour $z \in \mathbf{D} - \overline{B}(0, r)$, on a $|z| > r$ et, par hypothèse, $|f(z)| \leqslant 1$. Donc $|g(z)| < \frac{1}{r}$. Par le principe du maximum global cela implique que

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad |g(z)| < \frac{1}{r}.$$

Comme cela vaut pour tout nombre réel $r > 1$, on obtient

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad |g(z)| \leqslant 1.$$

Cela démontre les assertions a) et b).

Traitons maintenant le cas d'égalité. L'hypothèse signifie qu'il existe $z \in \mathbf{D}$ qui vérifie $|g(z)| = 1$. Donc l'application $|g|$ admet un maximum local en z. Par le principe du maximum local, l'application g est constante, soit α sa valeur. Par ce qui précède, $|\alpha| = 1$ et par définition de g,

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad f(z) = \alpha z.$$

□

Définition IV.9. — Soit U et V des ouverts de $\mathbf{C}$. Un *isomorphisme bianalytique* (ou *biholomorphe*) *de* U *dans* V est une application bijective $\varphi : U \to V$ telles que l'application de U dans $\mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \varphi(z)$ est holomorphe de même que l'application de V dans $\mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \varphi^{-1}(z)$. Si $U = V$ on dira que φ est un *automorphisme bianalytique* (ou *biholomorphe*) *de* U.

Théorème IV.10. — a) *Pour tout* $a \in \mathbf{D}$, *et tout* $\alpha \in \mathbf{U}$, *il existe un unique automorphisme bianalytique* φ *de* $\mathbf{D}$ *tel que*

$$\varphi(0) = a \text{ et } \varphi'(0) \in \mathbf{R}_+^* \alpha.$$

b) *Les automorphismes bianalytiques de* $\mathbf{D}$ *sont les applications de la forme*

$$z \longmapsto \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}$$

avec $a, b \in \mathbf{C}$ *et* $|a| > |b|$.

Pour faciliter la preuve, rappelons la notion d'action de groupes

Définition IV.11. — Soit G un groupe d'´lément neutre 1_G et soit X un ensemble. On appelle *action de G sur X* une application de $G \times X$ dans X notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que

(AG1) (associativité)

$$\forall g, h \in G, \forall x \in X, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x;$$

(AG2) (action de l'élément neutre)

$$\forall x \in X, \quad 1_G \cdot x = x.$$

Remarque IV.12. — Notons qu'il revient au même de se donner un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ où $\mathfrak{S}_X$ désigne le groupe des permutations de X.

En effet, étant donné une action de groupe de G dans X, l'application de G dans $\mathfrak{S}_X$ qui envoie $g \in G$ sur $x \mapsto g \cdot x$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathfrak{S}_X$.

Inversement, si $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ est un morphisme de groupes, l'application $(g, x) \mapsto \rho(g)(x)$ définit une action de G sur X.

***Définition IV.13* (Homographies).** — L'ensemble $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ est appelée *droite projective complexe*. À toute matrice inversible $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ on peut associer l'application h_M de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } cz+d \neq 0; \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \text{ et } c \neq 0; \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $(M, z) \mapsto h_M(z)$ définit une action du groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}) \mid \det(M) \neq 0 \}$$

sur la droite projective. On appelle *homographie* une bijection de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la forme h_M pour une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

Remarques IV.14. — i) Le calcul suivant permet de vérifier la condition **(AG1)** :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d} &= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d} \\ &= \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} \cdot z\end{aligned}$$

ii) Si $\lambda \in \mathbf{C}^*$ alors la matrice $\lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Donc l'action par homographies induit une action du groupe quotient $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})/(\mathbf{C}^* I_2)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Preuve du théorème IV.10. — Démontrons d'abord l'unicité dans l'assertion a). Si les applications φ et ψ conviennent, alors l'application $\lambda = \varphi^{-1} \circ \psi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ vérifie $\lambda(0) = 0$ et $\lambda'(0) \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant l'assertion b) du lemme de Schwarz à λ et sa réciproque λ^{-1}, on obtient que $|\lambda'(0)| = 1$. Par conséquent $\lambda'(0) = 1$. Il résulte alors du cas d'égalité dans le lemme de Schwarz que $\lambda = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ si bien que $\varphi = \psi$.

Vérifions maintenant que les homographies données dans l'assertion b) envoient bien le disque unité dans lui-même. Pour cela fixons $a, b \in \mathbf{C}$ avec $|a| > |b|$. Soient $|c| > |d|$, le calcul du produit

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \overline{bc + ad} & \overline{bd + ac} \end{pmatrix}$$

prouve que le déterminant de cette dernière matrice est un nombre réel strictement positif. Autrement dit $|ac + b\overline{d}| > |ad + b\overline{c}|$. En appliquant cela à $d = z \in \mathbf{D}$ et $c = 1$, on obtient la majoration $|a + b\overline{z}| > |az + b|$ qui implique que $\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \in \mathbf{D}$. Donc on peut considérer l'application $h_{a,b} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ donnée par $z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$.

Notons que le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} - b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a} - b\overline{b} \end{pmatrix} = (|a|^2 - |b|^2) I_2$$

donne l'homographie triviale, ce qui prouve que $h_{a,b}$ est bijective et biholomorphe de réciproque $h_{\overline{a},-b}$.

Le calcul (9) permet d'écrire

$$h_{a,b} \circ h_{c,d} = h_{ac+b\overline{d}, ad+b\overline{c}}.$$

D'autre part pour $a \in \mathbf{D}$, l'application $h_{1,a}$ envoie 0 sur a et sa dérivé en 0 est donnée par

$$h'_{0,a}(0) = 1 - a\overline{a} \in \mathbf{R}_+^*$$

et si $\alpha \in \mathbf{R}$, alors $h_{e^{\frac{\alpha}{2}\mathrm{i}},0}$ est la multiplication par $e^{\alpha \mathrm{i}}$. La composée $h_{0,a} \circ h_{e^{\frac{\alpha}{2}\mathrm{i}},0}$ donne donc l'existence dans l'assertion a).

Enfin l'unicité dans l'assertion a), prouve que tous les automorphismes biholomorphes sont de la forme annoncée. □

IV.4. Forme locale et ouverture des applications holomorphes

Définition IV.15. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soient $f \in \mathscr{H}(U)$ et $a \in U$. La *valuation de f en a* est définie comme

$$v_a(f) = \min(\{n \in \mathbf{N} \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}.$$

***Théorème IV.16* (Forme locale des application holomorphes).** — *Soit f une application holomorphe sur un voisinage ouvert U de $a \in \mathbf{C}$. On suppose que f n'est pas* constante au voisinage de *a : c'est-à-dire que pour tout voisinage W de a, la restriction $f_{|W}$ n'est pas constante. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un nombre réel $r > 0$ et une application bijective biholomorphe de $B(0,r)$ sur V telle que la composée*

$$f_{|V} \circ h : B(0,r) \to \mathbf{C}$$

est donnée par

$$f_{|V} \circ h(z) = f(a) + z^n$$

pour $z \in B(0,r)$, où $n = v_a(f - f(a))$.

Démonstration. — Pour $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, on définit l'application $\sqrt[m]{\bullet} : \mathbf{C} -]-\infty, 0] \to \mathbf{C}$ par $z \mapsto \exp(\frac{1}{m}\operatorname{Log}(z))$. Quitte à remplacer l'application f par $f - f(a)$, on se ramène au cas où $f(a) = 0$. Dans ce cas, $n = v_a(f)$. Comme l'application f n'est pas constante au voisinage de a et que $f(a) = 0$, cette valuation est un entier $\geqslant 1$. Posons $\rho = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ce nombre est non nul par définition de la valuation. Ceci nous permet de considérer l'application $g : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{\rho(z-a)^n} & \text{si } z \neq a, \\ 1 & \text{si } z = a \end{cases}$$

Comme f est holomorphe sur U, l'application g est holomorphe sur $U - \{a\}$. Au voisinage de a, l'application g est l'application définie par la série formelle $\mathrm{DT}_a(f)/T^n$, elle est donc également holomorphe en a.

Comme $g(a) = 1$ et que l'application g est continue, il existe un voisinage ouvert V de a tel que $g(V) \subset \mathbf{C} -]-\infty, 0]$. On note γ une racine n-ème de ρ et on définit $\varphi : V \to \mathbf{C}$ par $z \mapsto \gamma(z-a)\sqrt[n]{g(z)}$. Cette application est holomorphe et vérifie la relation $f(z) = \varphi(z)^n$ pour $z \in V$. En particulier $\varphi(a) = 0$ et son taux d'accroissement en a est donné par

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \gamma\sqrt[n]{g(z)}$$

qui tend vers γ lorsque z tend vers a. Donc $\varphi'(a) = \gamma \neq 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à l'application φ. Donc, quitte à remplacer V par un voisinage plus petit de a, on peut en outre imposer que φ induit une application bijective biholomorphe de V sur $\varphi(V)$. Enfin, on peut choisir $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(0,r) \subset \varphi(V)$ et remplacer V par $\overset{-1}{\varphi}(B(0,r)) \cap V$. On note alors h l'application réciproque de φ de $B(0,r)$ dans V. L'égalité $f = \varphi^n$ sur V donne les relations

$$f \circ h(z) = (\varphi(h(z))^n = z^n$$

pour $z \in B(0,r)$. □

Corollaire IV.17. — *Avec les notations du théorème, supposons à nouveau que f n'est pas constante au voisinage de a. Posons $n = v_a(f - f(a))$. Alors il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ et un voisinage ouvert V de a tel que pour tout $w \in B(f(a), r) - \{f(a)\}$ l'équation $f(z) = w$ a exactement n solutions distinctes dans V.*

Démonstration. — Par le théorème IV.16, il existe $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$, un voisinage ouvert V de a et un isomorphisme bianalytique $h : B(0, r_0) \to V$ tel qu'on puisse écrire

$$f_{|V} \circ h(z) = f(a) + z^n$$

pour $z \in B(0, r_0)$. Comme l'application h est bijective, elle induit par restriction une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation $f(a) + z^n = w$ sur l'ensemble

$$\{z \in V \mid f(z) = w\}.$$

On est donc ramené à résoudre l'équation

$$z^n = w - f(a)$$

qui a exactement n solutions dans le disque $B(0, r_0)$ si $w \in B(f(a), r_0^n)$. On pose $r = r_0^n$. □

Corollaire IV.18. — *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $a \in \mathbf{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f'(a) \neq 0$;*

(ii) *Il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ est injective. (On dira que f est* injective au voisinage de *a.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) résulte du théorème d'inversion locale I.18.

Pour démontrer la réciproque, supposons f injective au voisinage de a. Alors f est non constante au voisinage de a. On peut donc appliquer le corollaire précédent. Par conséquent, la valuation $v_a(f - f(a))$ vaut 1 ce qui signifie que $f'(a) \neq 0$. □

Corollaire IV.19. — *Soit U un ouvert* connexe *de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$ une aplication holomorphe non constante. Alors l'application f est* ouverte *: l'image par f d'un ouvert de U est un ouvert de $\mathbf{C}$.*

Démonstration. — Soit V un ouvert de U, c'est-à-dire un ouvert de $\mathbf{C}$ contenu dans U. Soit $b \in f(V)$. On écrit $b = f(a)$ pour un élément a de V. Comme U est connexe, si f était constante au voisinage de a, elle serait constante sur U, ce qui est exclu par hypothèse. On peut donc appliquer le corollaire IV.17 à la restriction de f à V. Posons $n = v_a(f - b) \geqslant 1$. Tout élément de $B(b,r) - \{b\}$ possède n antécédents dans V et $b \in f(V)$ par hypothèse. On a donc démontré l'inclusion $B(b,r) \subset f(V)$. Cela prouve que $f(V)$ est ouvert. □

Si l'ouvert U n'est pas connexe et que l'application f est constante sur une des composantes connexes C de U, alors C est ouvert et $f(C)$ ne l'est pas. Donc l'application f n'est pas ouverte.

Corollaire IV.20. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. On suppose que l'application f est* injective. *Alors*

a) *La partie $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$;*

b) *L'application réciproque $f^{-1} : f(U) \to U$ est holomorphe.*

Démonstration. — Démontrons d'abord l'assertion a). Pour $a \in U$, notons C_a la composante connexe de a dans U. Pour tout $a \in U$, la partie C_a est ouverte et $f_{|C_a}$ est injective et donc non constante. Par le corollaire IV.19 appliqué à la restriction $f_{|C_a}$, la partie $f(C_a)$ est également ouverte. Comme $a \in C_a$ pour tout $a \in U$, on peut écrire $U = \bigcup_{a \in U} C_a$ et donc $f(U) = \bigcup_{a \in U} f(C_a)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$.

Démontrons maintenant l'assertion b) Par le corollaire IV.18, pour tout $a \in U$, la dérivée $f'(a)$ est non nulle. Par le théorème d'inversion locale I.18, l'application réciproque est holomorphe. □

Remarque IV.21. — Il résulte du corollaire précédent qu'une application holomorphe *injective* définit un isomorphisme bianalytique de son ouvert de définition sur son image.

Exercices

Exercice IV.1 (Autour du théorème de Liouville). Soit f une fonction entière.

1. On suppose qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^*$ et un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré d tels que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$. Démontrer que f est une application polynomiale de degré au plus d.
2. On suppose que f est non constante. Démontrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

Exercice IV.2. Rappelons que $\mathbf{U}$ désigne le cercle unité dans $\mathbf{C}$.

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que $f(z) \in \mathbf{R}$ si $z \in \mathbf{U}$. Démontrer que f est constante. (On pourra considérer l'application $\exp(\mathrm{i}f)$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{U}$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que $f = \lambda g$ sur Ω. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas ?

Exercice IV.3. Soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ des nombres complexes de module 1. Démontrer qu'il existe un nombre complexe ω de module 1 tel que

$$\prod_{k=1}^{n} |\omega - \omega_k| = 1.$$

Exercice IV.4. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur le disque unité. On suppose que f se prolonge en une fonction continue sur le disque unité fermé $\overline{\mathbf{D}}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\theta > 0$ tels que, pour tout $t \in [\alpha, \alpha + \theta]$, on ait $f(e^{t\mathrm{i}}) = 0$. Démontrer que f est identiquement nulle.

Exercice IV.5. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathcal{H}$ une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbf{D}$ à valeurs dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ telle que $f(0) = \mathrm{i}$. Démontrer que pour tout $z \in \mathbf{D}$, on a

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

et que $|f'(0)| \leqslant 2$. On pourra utiliser l'application $h : z \mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ holomorphe sur $\mathcal{H}$.

Exercice IV.6 (Lemme de Schwarz-Pick).

1. Pour tout $\omega \in \mathbf{D}$, on définit l'aplication $T_\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ par

$$z \longmapsto \frac{\omega - z}{1 - \overline{\omega} z}.$$

Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une application holomorphe. En considérant l'application $h = T_{f(\omega)} \circ f \circ T_\omega$, prouver que pour tous $x, y \in \mathbf{D}$, on a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(x)} f(y)} \right| \leqslant \left| \frac{x - y}{1 - \bar{x} y} \right|.$$

2. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une application holomorphe et $z \in \mathbf{D}$. Démontrer que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice IV.7. 1. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit m un entier $\geqslant 1$. On suppose que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour $z \in \mathbf{D}$. Démontrer que l'application $g : z \mapsto f(z) z^{-m}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ et que $|g(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbf{D}$. En déduire que $|f(z)| \leqslant M|z|^m$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

2. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une fonction holomorphe, qui s'étend en fonction continue sur $\overline{\mathbf{D}}$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{D}$ et $m_1, \ldots, m_n$ des entiers $\geqslant 1$. On suppose que $v_{a_i}(f) \geqslant m_i$. À l'aide des applications T_{a_i} définies dans l'exercice IV.6, démontrer la majoration

$$|f(0)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{m_k}.$$

V. Fonctions méromorphes

V.1. La sphère de Riemann. — Rappelons qu'on note $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Nous allons munir cet espace d'une topologie.

Notation V.1. — Il y a deux applications injectives ι_0 et ι_∞ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ données respectivement par

$$\iota_0 : z \mapsto z \quad \text{et} \quad \iota_\infty : z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

On notera que $\iota_0(0) = 0$ et $\iota_\infty(0) = \infty$.

Définition V.2. — On munit $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la topologie suivante : une partie $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est ouverte si et seulement si $\overset{-1}{\iota}_0(U)$ et $\overset{-1}{\iota}_\infty(U)$ le sont.

Proposition V.3. — a) *Les parties $\iota_0(\mathbf{C})$ et $\iota_\infty(\mathbf{C})$ sont des ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.*

b) *Pour $k \in \{0, \infty\}$, l'application ι_k définit un homéomorphisme de $\mathbf{C}$ sur $\iota_k(\mathbf{C})$.*

Démonstration. — L'assertion a) résulte du fait que $\overset{-1}{\iota}_0(\iota_\infty(\mathbf{C})) = \mathbf{C}^* = \overset{-1}{\iota}_\infty(\iota_0(\mathbf{C})$ est un ouvert de $\mathbf{C}$.

Soit $k \in \{0, \infty\}$. L'application ι_k est continue et injective. Il suffit donc de vérifier que ι_k est ouverte. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Alors

$$\overset{-1}{\iota}_\infty(\iota_0(U)) = \overset{-1}{\iota}_0(\iota_\infty(U)) = \{z \in \mathbf{C}^* \mid \frac{1}{z} \in U\}.$$

Comme l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^*$, on obtient que l'ensemble $\{z \in \mathbf{C}^* \mid \frac{1}{z} \in U\}$ est ouvert. □

Proposition V.4. — *Dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, les voisinage du point ∞ sont les parties contenant un ensemble de la forme $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \overline{B}(0, R)$ avec $R \in \mathbf{R}_+^*$.*

Démonstration. — Par définition,

$$\overset{-1}{\iota}_\infty(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \overline{B}(0, R)) = B\Big(0, \frac{1}{R}\Big)$$

et $\iota_\infty : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0\}$ est un homéomorphisme qui envoit les voisinages de 0 sur les voisinages de ∞ dans l'ouvert $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{\infty\}$. □

Remarque V.5. — L'exercice V.1 montre que la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à la sphère. C'est pourquoi cet espace est également appelé *sphère de Riemann*.

Proposition V.6. — *Soit X un espace topologique. Une application $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to X$ est continue si et seulement si les applications $f \circ \iota_0$ et $f \circ \iota_\infty$ le sont.*

Démonstration. — L'application f est continue si et seulement si pour tout ouvert U de X, la partie $\overset{-1}{f}(U)$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est ouverte. Mais par définition de la topologie de cet espace, cela équivaut à ce que les parties $\overset{-1}{\iota}_0(\overset{-1}{f}(U))$ et $\overset{-1}{\iota}_\infty(\overset{-1}{f}(U))$ soient ouvertes. □

Exemple V.7. — Considérons l'application $\mathrm{inv} : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ definie par

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \notin \{0, \infty\}, \\ 0 & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

C'est une application continue puisque $\mathrm{inv} \circ \iota_0 = \iota_\infty$ et $\mathrm{inv} \circ \iota_\infty = \iota_0$. Notons que inv est une *involution*, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\mathrm{inv} \circ \mathrm{inv} = \mathrm{Id}_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}$. On notera simplement $\frac{1}{z}$ pour $\mathrm{inv}(z)$.

Il est un peu plus délicat de dire quand une application *à valeur dans* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est continue. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition V.8. — *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une application. L'injectivité de ι_0 et ι_∞ permet de définir les applications*

$$f_0 : X - \overset{-1}{f}(\{\infty\}) \to \mathbf{C} \quad \textit{et} \quad f_\infty : X - \overset{-1}{f}(\{0\}) \to \mathbf{C}$$

comme les uniques applications telles que

$$f_{|X - \overset{-1}{f}(\{\infty\})} = \iota_0 \circ f_0 \quad \textit{et} \quad f_{|X - \overset{-1}{f}(\{0\})} = \iota_\infty \circ f_\infty.$$

Alors l'application f est continue si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes

(i) *Les parties $\overset{-1}{f}(\{0\})$ et $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ sont fermées.*

(ii) *La applications f_0 et f_∞ sont continues.*

Démonstration. — Si f est continue, la condition (i) est vérifiée. D'autre part f_0 (resp. f_∞) est la composée de l'application de $X - \overset{-1}{f}(\{\infty\}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{\infty\}$ (resp. $X - \overset{-1}{f}(\{0\}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0\}$) déduite de f par restriction aux sous-espaces et de la réciproque de ι_0 (resp. ι_∞). Donc f_0 et f_∞ sont continues.

Réciproquement supposons les conditions (i) et (ii) vérifiées. Notons U_0 l'ouvert $X - \overset{-1}{f}(\{\infty\})$ et U_∞ l'ouvert $X - \overset{-1}{f}(\{0\})$ alors les applications $f_{|U_0}$ et $f_{|U_\infty}$ sont continues comme composées d'applications continues et comme X est la réunion des *ouverts* U_0 et U_∞, l'application f est continue. En effet soit V un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ alors $\overset{-1}{f}_{|U_0}(V)$ est un ouvert de U_0 et donc de X. Il en est de même de $\overset{-1}{f}_{|U_\infty}(V)$. Or

$$\overset{-1}{f}(V) = \overset{-1}{f}_{|U_0}(V) \cup \overset{-1}{f}_{|U_\infty}(V).$$ □

V.2. Fonctions méromorphes

Proposition et définition V.9. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Une* fonction holomorphe de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *est une application $f : U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(i) *L'application f est continue et les applications f_0 et f_∞ sont holomorphes ;*

(ii) *Pour tout $a \in U$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $B(a,r) \subset U$ et $g \in \mathscr{H}(B(a,r))$ tels que $f_{|B(a,r)} = \iota_0 \circ g$ ou $f_{|B(a,r)} = \iota_\infty \circ g$;*

(iii) *Pour tout $a \in U$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $B(a,r) \subset U$ tel qu'une des deux conditions suivantes soit vérifiee :*
— $f(B(a,r)) \subset \mathbf{C}$ et l'application de $B(a,r)$ dans $\mathbf{C}$ induite par f est holomorphe ;
— $f(B(a,r)) \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0\}$ et l'application de $B(a,r)$ dans $\mathbf{C}$ induite par $1/f$ est holomorphe.

Remarque V.10. — En dehors de ce paragraphe, on évitera d'utiliser le terme *holomorphe* pour les applications à valeur dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, afin d'éviter la confusion avec les applications holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ qui, sauf mention explicite du contraire, sont à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Preuve de la proposition. — L'équivalence entre les deux premières assertions résulte du fait qu'une application $g : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si pour tout $a \in U$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $B(a,r) \subset U$ telle que $g_{|B(a,r)} \in \mathscr{H}(B(a,r))$.

La seconde équivalence est une simple réécriture reposant sur les définitions de ι_0 et ι_∞. □

Remarques V.11. — i) On notera qu'une application holomorphe de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est continue.

ii) Dans la condition (iii), si $f(a) = 0$, on est forcément dans le premier cas, si $f(a) = \infty$ on est dans le second. Sinon on peut trouver $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que les deux conditions soient vérifiées.

iii) La fonction constante de valeur ∞ est holomorphe au sens précédent.

iv) Si U est connexe et que f n'est pas l'application constante de valeur ∞, alors $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ est localement fini dans U. En effet, appliquons le corollaire II.20 à la fonction $\frac{1}{f}$, on obtient que $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ est discret et fermé dans $U - \overset{-1}{f}(\{0\})$. Mais comme $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ est fermé dans U, il est discret et fermé dans U.

Définition V.12. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, une application *méromorphe* sur U est une fonction holomorphe de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ telle que $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ est localement fini. On note $\mathscr{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U. Un *pôle* de $f \in \mathscr{M}(U)$ est un élément de $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$.

Remarques V.13. — i) Notons que si $f \in \mathscr{M}(U)$, alors l'application $f_0 : U - \overset{-1}{f}(\{\infty\}) \to \mathbf{C}$ est holomorphe.

ii) Si $f \in \mathscr{M}(U)$, on identifie f avec la *fonction* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ dont le domaine de définition est $\mathscr{D}_f = U - \overset{-1}{f}(\{\infty\})$ et qui a pour graphe le graphe de f_0.

V.3. Séries de Laurent. — Les séries de Laurent sont une généralisation des séries entières, qui correspond au développement d'une application méromorphe en un pôle.

Définition V.14. — On appelle Série de Laurent une famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes telle que l'ensemble

$$\{n \in \mathbf{Z} \mid \alpha_n \neq 0\}$$

admet un minorant. On la note $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$.

— **L'addition :**

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n T^n + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \beta_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\alpha_n + \beta_n) T^n;$$

— **La multiplication scalaire :**

$$\lambda \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda\alpha_n T^n \text{ pour tout } \lambda \in \mathbf{K};$$

— **Le produit** (dit de Cauchy) :

$$\Big(\sum_{p\in\mathbf{Z}}\alpha_p T^p\Big)\times\Big(\sum_{q\in\mathbf{Z}}\beta_q T^q\Big)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{p+q=n}\alpha_p\beta_q\Big)T^n.$$

On notera $\mathbf{C}((T))$ l'ensemble des séries de Laurent muni de ces lois.

Si $S\in\mathbf{C}((T))$, la *valuation* de S est

$$v(S)=\begin{cases}\min(\{n\in\mathbf{Z}\mid a_n\neq 0\}) & \text{si } S\neq 0\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

La *partie polaire* d'une série de Laurent S est $\sum_{n<0}a_nT^n$.

Soit S une série de Laurent et P sa partie polaire. Le *rayon de convergence* R_S de la série S est le rayon de convergence de la série entière $S-P$.

La dérivée d'une série de Laurent S est la série de Laurent

$$S'=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(n+1)a_{n+1}T^n.$$

Remarques V.15. — i) Notons que $R_{TS}=R_S$, donc si $S\neq 0$ le rayon de convergance de S est aussi le rayon de convergence de la série entière $T^{-v(S)}S$.

ii) On a les formules

$$R_{S_1+S_2}\geqslant\min(R_{S_1},R_{S_2}),\qquad R_{S_1S_2}\geqslant\min(R_{S_1},R_{S_2})\quad\text{et}\quad R_{S'}=R_S.$$

iii) Si le rayon de convergence d'une série de Laurent $S=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\alpha_nT^n$ est strictement positif, alors cette série définit pour tout $a\in\mathbf{C}$ une application de $B(a,R_S)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donnée par

$$z\longmapsto\begin{cases}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\alpha_n(z-a)^n & \text{si } z\neq a \text{ ou } v(S)\geqslant 0;\\ \infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Théorème V.16. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $f:U\to\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une application. Alors f est méromorphe si et seulement si pour tout $a\in U$, il existe $r\in\mathbf{R}_+^*$ et une série de* Laurent *S ayant un rayon de convergence $R_S>r$ et telle que la restriction de f à $B(a,r)$ soit l'application définie par la série S. Cette série est alors uniquement déterminée et s'appelle la série de* Laurent *de f en a. On la note $\mathrm{DL}_a(f)$. En outre, on peut prendre*

$$r=\sup(\{t\in\mathbf{R}_+^*\mid B(a,t)-a\subset U-\overset{-1}{f}(\{\infty\})\}).$$

Démonstration. — Démontrons d'abord l'implication directe. Supposons f méromorphe Il suffit de traiter le cas où $f(a)=\infty$, car sinon cela résulte de l'analyticité des fonctions holomorphes (théorème III.13). Si $f(a)=\infty$, il existe un numbre réel $r>0$ avec $B(a,r)\subset U$ tel que $\frac{1}{f}{}_{|B(a,r)}$ est holomorphe et non constante au voisinage de a, puisque, par la définition de la méromorphie, l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{\infty\})$ est localement fini. En outre $\frac{1}{f}(a) = 0$. Soit $m = v_a\left(\frac{1}{f}\right)$. Alors, l'application g donnée par

$$z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m} \times \frac{1}{f(z)}$$

est holomorphe sur $B(a,r)$ et $c = g(a) \neq 0$. Donc il existe $r' \in]0,[r$ tel que

$$\forall z \in B(a,r'), \quad g(z) \neq 0.$$

Par conséquent $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur $B(a,r')$. Mais la définition de g donne la relation

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z-a)^m} g(z) & \text{si } z \neq a, \\ \infty & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Il en résulte que la série de Laurent $S = T^{-m} DT_a(g)$ définit f sur $B(a,r')$.

Démontrons maintenant la réciproque. Soit $a \in U$ et soit S la série de Laurent qui définit f sur la boule $B(a,r)$. Si $v(S) \geqslant 0$ alors S est une série entière et par le théorème II.12, l'application f est holomorphe en a. Sinon la série $E = T^{-v(S)}S$ est une série entière de rayon de convergence $R = R_S > r$. Soit $g : B(a,r) \to \mathbf{C}$ la fonction associée. Elle est holomorphe sur $B(a,r)$ par le théorème II.12 et $g(a) \neq 0$. Donc $\frac{1}{g}$ est holomorphe en a. et

$$\frac{1}{f}(z) = (z-a)^{-v(S)} \frac{1}{g(z)}$$

pour $z \in B(a,r)$, ce qui prouve que $\frac{1}{f}$ est holomorphe en a, puisque $v(S) < 0$.

Démontrons maintenent l'unicité de la série de Laurent en un point $a \in U$. Mais si S_1 et S_2 conviennent, posons $m = \min(v(S_1), v(S_2))$, et choisissons $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que S_1 et S_2 définissent toutes deux f sur $B(a,r)$. Les séries entières $T^m S_1$ et $T^m S_2$ définissent la même fonction sur $B(a,r) - \{a\}$; par continuité, cela vaut aussi en a. Donc $T^m S_1 = T^m S_2$ et $S_1 = S_2$.

La dernière assertion résulte du résultat analogue sur les fonctions holomorphes (*cf.* remarque III.16). □

V.4. L'algèbre des applications méromorphes

Proposition et définition V.17. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soient $f, g \in \mathscr{M}(U)$. et soit $V = U - (\overset{-1}{f}(\infty) \cup \overset{-1}{g}(\infty))$ qui est un ouvert de $\mathbf{C}$. Alors l'application $f_{|V} + g_{|V}$ (*resp.* $f_{|V} \times g_{|V}$) se prolonge par continuité en une unique fonction méromorphe sur U notée $f+g$ (*resp.* $f \times g$ ou fg).*

Remarque V.18. — Le point c'est que $\infty + \infty$ ou $0 \times \infty$ ne sont pas déterminés et c'est en prolongant par continuité que l'on peut élucider la valeur du produit ou de la somme en un point d'indétermination.

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème V.16. En effet $f+g$ (resp. $f \times g$) est défini par la série de Laurent $\mathrm{DL}_a(f) + \mathrm{DL}_a(g)$ (resp. $\mathrm{DL}_a(f) \times \mathrm{DL}_a(g)$) au voisinage de a. □

Proposition V.19. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Alors $f \in \mathscr{M}(U)$ est inversible dans $\mathscr{M}(U)$ si et seulement si $\overset{-1}{f}(\{0\})$ est localement fini.*

Démonstration. — Par définition $\frac{1}{f} = \mathrm{inv} \circ f$ est une application holomorphe de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Elle est méromorphe si et seulement si $\overset{-1}{\frac{1}{f}}(\{\infty\}) = \overset{-1}{f}(\{0\})$ est localement fini dans U. □

Corollaire V.20. — *Si U est connexe et non vide, alors $\mathscr{M}(U)$ est un corps.*

Proposition V.21. — *Soient U et V des ouverts de $\mathbf{C}$. Soient $g \in \mathscr{M}(V)$ et $f \in \mathscr{H}(U)$ telle que $f(U) \subset V$. On suppose en outre que $\overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\{\infty\}))$ est localement fini dans U. Alors $g \circ f \in \mathscr{M}(U)$.*

Démonstration. — Si $g(f(a)) = \infty$, alors $\frac{1}{g \circ f} = \frac{1}{g} \circ f$ est holomorphe au voisinage de a comme composée d'applications holomorphes Cela prouve que $g \circ f$ est une application holomorphe de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La condition sur $\overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\infty))$ assure qu'elle est méromorphe. □

Cela est en général *faux* si on ne suppose pas que l'application $f : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe. Ainsi $z \mapsto \frac{1}{z}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, l'application exp est entière, mais l'application de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donnée par $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ *n'admet pas* de limite en 0 dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. A fortiori, elle ne se prolonge pas en une application méromorphe.

Proposition V.22. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{M}(U)$. Alors l'application $f' : U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par*

$$z \longmapsto \begin{cases} f'(z) & \text{si } f(z) \neq \infty, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une application méromorphe.

Démonstration. — L'application f' est d'éfinie par la série dérivée $\mathrm{DL}_a(f)'$ en a. □

V.5. Prolongement analytique. — Le principe du prolongement analytique (corollaire II.21) se généralise aux fonctions méromorphes, avec la même preuve :

***Théorème V.23.* —** *Soit U un ouvert* connexe *de* **C**. *Soient $f, g \in \mathscr{M}(U)$. Si une des deux conditions suivantes est vérifiée*

(i) $\exists a \in U, \quad \mathrm{DL}_a(f) = \mathrm{DL}_a(g)$,

(ii) *L'ensemble $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ n'est pas localement fini dans U,*

alors $f = g$.

V.6. Résidus

***Définition V.24.* —** Soit U unouvert de **C**, soit $f \in \mathscr{M}(U)$ et soit $a \in U$. Alors le *résidu en a de f*, noté $\mathrm{Rés}_a(f)$, est le coefficient de T^{-1} dans $\mathrm{DL}_a(f)$.

***Remarque V.25.* —** L'application $f \mapsto \mathrm{Rés}_a(f)$ est linéaire sur $\mathscr{M}(U)$:

a) $\mathrm{Rés}_a(f+g) = \mathrm{Rés}_a(f) + \mathrm{Rés}_a(g)$ pour tous $f, g \in \mathscr{M}(U)$.

b) $\mathrm{Rés}_a(\lambda f) = \lambda \mathrm{Rés}_a(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $f \in \mathscr{M}(U)$.

***Exemple V.26.* —** Si $f \in \mathscr{M}(U)$, alors $\mathrm{Rés}_a(f') = 0$.

***Proposition V.27.* —** *Soit U un ouvert de* **C** *et soit $f \in \mathscr{M}(U)$. On suppose que l'application f n'est pas identiquement nulle au voisinage de $a \in U$. Alors*

$$\mathrm{Rés}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = v_a(f).$$

Démonstration. — Soit $m = v_a(f)$. Soit $g : U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ le produit de f par l'application définie par $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m}$. Alors g est holomorphe en a et $g(a) \neq 0$. De plus la dérivée logarithmique de f est donnée par

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'}{g}.$$

La formule s'obtient alors en notant que $\frac{g'}{g}$ est holomorphe en a. □

***Proposition V.28* (Changement de variables). —** *Soient U et V des ouverts de* **C**. *Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ une application holomorphe non constante au voisinage de a et soit $g \in \mathscr{M}(V)$. On suppose que $f(U) \subset V$. Alors*

$$\mathrm{Rés}_a(f' \times (g \circ f)) = v_a(f - f(a)) \times \mathrm{Rés}_{f(a)}(g).$$

Démonstration. — Posons $b = f(a)$. En séparant la partie polaire de g, on peut écrire

$$g(z) = \sum_{k=v(g)}^{-1} \beta_k (z-b)^k + h(z)$$

où l'application h est holomorphe en b. Il en résulte la formule

$$f'(z) g \circ f(z) = \sum_{k=v(g)}^{-1} \beta_k f'(z)(f(z)-b)^k + f'(z)h(f(z)).$$

Mais si $k \neq -1$, l'application $z \mapsto f'(z)(f(z)-b))^k$ est la dérivée de $z \mapsto \frac{1}{n+1}(f(z)-b)^{n+1}$ et son résidu est nul. D'autre part l'application $z \mapsto f'(z)h(f(z))$ est holomorphe et son résidu est nul. On obtient l'égalité

$$\mathrm{Rés}_a(f' \times g \circ f) = \beta_{-1} \mathrm{Rés}_a\left(\frac{f'}{f-b}\right) = v_a(f-b)\mathrm{Rés}_b(g).$$

□

V.7. Théorème des résidus sur un cercle

***Proposition V.29* (Théorème des résidus pour un cercle).** — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soient $f \in \mathscr{M}(U)$ et $a \in U$. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$ et $C(a,r) \cap \overset{-1}{f}(\{\infty\}) = \emptyset$. Alors*

$$\int_{C(a,r)} f(z) \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \sum_{b \in B(a,r)} \mathrm{Rés}_b(f).$$

Remarque V.30. — Notons que l'ensemble des pôles de f dans le compact $\overline{B}(a,r)$ est fini, si bien que la somme du terme de droites ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Traitons tout d'abord le cas des applications holomorphes :

Lemme V.31. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $g \in \mathscr{H}(U)$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Alors*

$$\int_{C(a,r)} g(z) \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = 0$$

Démonstration. — On applique la formule intégrale de Cauchy en a à la fonction $z \mapsto (z-a) \times g(z)$ pour obtenir les égalités

$$\int_{C(a,r)} g(z) \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \int_{C(a,r)} \frac{(z-a) \times g(z)}{z-a} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = (a-a) \times g(a) = 0.$$

□

Preuve de la proposition. — Soient $b_1,\dots,b_s$ les pôles de f dans $B(a,r)$. Pour chaque $i \in \{1,\dots,s\}$, on considère l'application $h_i : U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donnée par $z \mapsto \sum_{n\leqslant -1} \alpha_{n,i}(z-b_i)^n$ où $\sum_{n\leqslant -1} \alpha_{n,i} T^n$ est la partie polaire de $DL_{b_i}(f)$. L'application $f - \sum_{k=1}^{s} h_k$ est holomorphe sur $\overline{B}(a,r)$. Par conséquent,

$$\int_{C(a,r)} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{k=1}^{s}\int_{C(a,r)} h_i(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Mais si $k \neq -1$, l'application définie par $z \mapsto \alpha_{k,i}(z-a)^k$ admet une primitive $z \mapsto \frac{\alpha_{k,i}}{k+1}(z-a)^{k+1}$ donc son intégrale le long du lacet $t \mapsto a + re^{2\pi t\mathrm{i}}$ est nulle. On obtient

$$\int_{C(a,r)} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{k=1}^{s}\int_{C(a,r)} \frac{\alpha_{-1,k}}{z-b_i}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{-1,k} = \sum_{b\in B(a,r)} \mathrm{Rés}_b(f).$$

□

L'objectif du chapitre suivant est d'utiliser la notion d'homotopie sur les lacets et de groupe de Poincare décrites dans l'appendice A3 pour généraliser cette formule à un lacet plus général.

Exercices

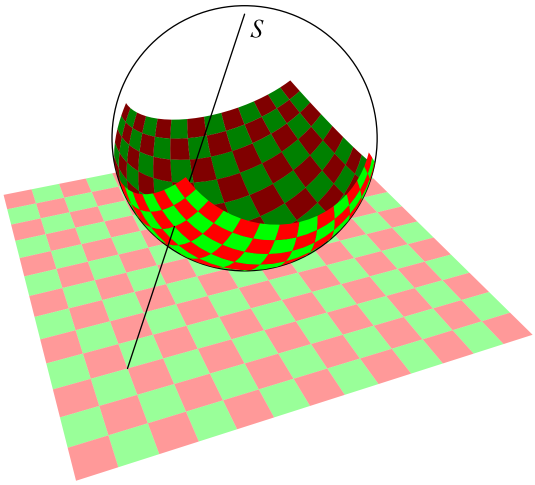

FIGURE 11. La sphère de Riemann

Exercice V.1 (Projection stéréographique). On considère la sphère unité

$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

Soit $\varphi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}^2$ l'application définie par

$$z \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4} \right) \text{ si } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbf{R}, \\ (0, 0, 1) \text{ si } z = \infty. \end{cases}$$

1. Prouver que φ est un homéomorphisme.
2. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Que peut-on dire des points $S = (0, 0, 1)$, $\varphi(x+iy)$ et $(x, y, -1)$? En déduire une description géométrique de φ (*cf.* figure 11).

Exercice V.2 (Fonction holomorphes sur une couronne). Soient r et R des nombres réels tels que $0 < r < R$ et soit f une fonction holomorphe sur la *couronne* ouverte

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R \}.$$

Pour tout $r' \in]r, R[$, on note $\gamma_{r'}$ le cercle de centre 0 et de rayon r', orienté dans le sens trigonométrique. Soit f une fonction holomorphe sur C.

1. Démontrer qu'en général f ne satisfait pas la formule de Cauchy ; on peut avoir
$$f(z) \neq \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi \mathrm{i}}.$$
2. Démontrer que pour tous $r_1, r_2 \in]r, R[$, on a l'égalité
$$\int_{\gamma_{r_1}} f(u)\mathrm{d}u = \int_{\gamma_{r_2}} f(u)\mathrm{d}u.$$
3. Soient $r_1, r_2 \in]r, R[$ avec $r_1 < r_2$. Soit $z \in C$. Démontrer que pour tout $r_1 < |z| < r_2$, on a l'égalité
$$f(z) = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} - \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}.$$
On pourra éventuellement considérer la fonction g_z définie sur C par
$$u \mapsto \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} \text{ si } u \neq z, \\ f'(z) \text{ si } u = z. \end{cases}$$
4. En déduire que l'on peut décomposer f de manière unique sous la forme
$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$
où f_1 est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, R)$ et f_2 une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, \frac{1}{r})$ avec $f_2(0) = 0$.
5. En déduire que si f est un fonction holomorphe sur le disque épointé $B(0, R) - \{0\}$ et bornée sur un voisinage épointé de 0, alors l'application f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur $B(0, R)$. On dit que *la singularité en* 0 *est effaçable*.

Exercice V.3. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f(z) \neq \infty$ pour tous $z \in \mathbf{C} - B(0, R)$.

1. Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbf{C}$.
2. On note $z_1, \ldots, z_p$ ces pôles et $m_1, \ldots, m_p$ leur multiplicités respectives. On considère le polynôme
$$P = \prod_{i=1}^{p} (T - z_i)_i^m$$
Démontrer que la fonction $g : z \mapsto P(z)f(z)$ se prolonge en une fonction entière.

3. On considère $h : z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)$. Démontrer que h induit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en 0.
4. En déduire que f est l'application définie par une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbf{C}(T)$.

Exercice V.4. À l'aide du théorème des résidus, calculer, pour $a \in \left]1, +\infty\right[$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \sin(\theta)}.$$

On pourra, pour cela, poser $z = e^{\theta i}$ et exprimer $\sin(\theta)$ en termes de z.

Exercice V.5. Déterminer si les fonctions suivantes admettent un pôle en 0. Si c'est le cas, calculer leurs résidus en 0.

$$z \longmapsto \exp(1/z), \qquad z \longmapsto \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{\exp(z) - 1} - \frac{1}{z}, \qquad z \longmapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right).$$

Exercice V.6. À l'aide du théorème des résidus, calculer

$$I = \int_0 -^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \sin(\theta)},$$

pour un nombre réel $a > 1$. (On pourra poser $z = e^{\theta i}$ et exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de z.)

VI. Théorème des résidus

VI.1. Primitive le long d'un chemin. — Nous allons maintenant définir une seconde version de l'intégration complexe qui, cette fois, ne vaut que pour les fonctions holomorphes, mais s'applique à tout chemin continu.

Définition VI.1. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soient a et $b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit γ une application continue de $[a, b]$ dans U. On appelle *primitive de f le long de γ* une application $F : [a, b] \to \mathbf{C}$ telle que pour tout $t_0 \in [a, b]$, il existe des nombres réels strictement positifs r et η avec $B(\gamma(t_0), r) \subset U$ et une application holomorphe $G \in B(\gamma(t_0), r)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $G' = f_{|B(\gamma(t_0), r)}$;

(ii) Pout $t \in [a, b]$ tel que $|t - t_0| < \eta$, on a $F(t) = G \circ \gamma(t)$.

Cette définition signifie que localement la valeur de la fonction F est donnée par une primitive de f au sens de la dérivation complexe. Nous allons maintenant prouver qu'une telle primitive existe et est unique à une constante près :

Proposition VI.2. — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, $f \in \mathscr{H}(U)$ et $\gamma : [a, b] \to U$ une application continue. Alors*

a) *Il existe une primitive de f le long de γ ;*

b) *La différence entre deux primitive de f le long de γ est constante.*

Démonstration. — Démontrons tout d'abord l'assertion b). Soient F_1 et F_2 des primitives de f le long de γ. Soit $t_0 \in [a, b]$. Par définition, on peut alors se donner des primitives G_1 et G_2 de f sur une boule $B(\gamma(t_0), r)$ contenue dans U et $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in [a, b]$ tel que $|t - t_0| < \eta$ on ait $\gamma(t) \in B(\gamma(t_0), r)$ ainsi que les égalités

$$F_1(t) = G_1(\gamma(t)) \quad \text{et} \quad F_2(t) = G_2(\gamma(t)).$$

Comme $G_1' - G_2' = f - f = 0$ sur $B(\gamma(t_0), r)$, l'application $F_1 - F_2$ est constante sur l'intersection $[a, b] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$. Posons $C = F_1(a) - F_2(a)$. Par ce qui précède, l'ensemble

$$\{\, t \in [a, b] \mid F_1(t) - F_2(t) = C \,\}$$

est ouvert et fermé dans l'intervalle $[a, b]$ qui est connexe. Donc, comme cette partie contient a elle est égale à $[a, b]$. Donc $F_1 - F_2$ est constante de valeur C.

Démontrons maintant l'assertion a), c'est-à-dire l'existence. Pour cela notons A l'ensemble des $\lambda \in [a,b]$ tels que f admette une primitive F_λ le long de $\gamma_{|[0,\lambda]}$. On note s la borne supérieure de A dans l'intervalle $[a,b]$. En particulier $s = a$ si $A = \emptyset$. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(\gamma(s), r) \subset U$. La continuité de γ nous fournit $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\gamma(t) \in B(\gamma(s), r)$ pour $t \in [a,b]$ avec $|t-s| < \eta$. Par le corollaire III.20, il existe une application $G \in \mathscr{H}(B(\gamma(s), r))$ tel que $G' = f_{|B(\gamma(s),r)}$. Posons $s' = \max\left(a, s - \frac{\eta}{2}\right)$ et $s'' = \min\left(b, s + \frac{\eta}{2}\right)$. Si $s = a$, l'application $F : [0, s''] \to \mathbf{C}$ donnée par $t \mapsto G(\gamma(t))$ est une primitive de f le long de $\gamma_{|[a,s'']}$ et $a'' \in A$. Sinon $s' \in A$ et la définition de A donne une primitive $F_{s'}$ de f le long de $\gamma_{|[a,s']}$. Alors l'application $F_{s''} : [a, s''] \to \mathbf{C}$ donnée par

$$z \longmapsto \begin{cases} F_{s'}(t) & \text{si } t \in [a, s'] \\ F_{s'}(s') + G(t) - G(s') & \text{si } t \in [s', s''] \end{cases}$$

est une primitive de f le long de $\gamma_{|[a,s'']}$ Donc on obtient également que $s'' \in A$. Comme s était défini comme la borne supérieure de A, le nombre $s + \frac{\eta}{2}$ n'appartient pas à A. Donc $b \in A$. □

Remarque VI.3. — Il faut noter que cette preuve utilise qu'une fonction holomorphe est analytique et donc indirectement la formule intégrale de Cauchy.

Proposition VI.4. — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, $f \in \mathscr{H}(U)$ et $\gamma : [a,b] \to U$ une application continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit F une primitive de f le long de γ. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(b) - F(a).$$

Démonstration. — Nous allons prouver que l'application $F : t \mapsto \int_{\gamma_{|[a,t]}} f(z)\mathrm{d}z$ est un primitive de f le long de γ. Soit $t_0 \in [a,b]$. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $B(\gamma(t_0), r) \subset U$ et soit $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\gamma([a,b] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[) \subset B(\gamma(t_0), r)$$

Comme dans la preuve précédente, le développement de Taylor en $\gamma(t_0)$ de f nous donne une application $G \in \mathscr{H}(B(\gamma(t_0), r))$ dont la dérivée est f. Quitte à remplacer G par $G - G(\gamma(t_0)) + F(t_0)$, on peut supposer que $G(\gamma(t_0)) = F(t_0)$. Soit $t \in [a,b]$ avec $|t - t_0| < \eta$. Si $t \geqslant t_0$, alors par l'asssertion c) de la proposition III.3

$$F(t) = \int_{\gamma_{|[a,t_0]}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{|[t_0,t]}} f(z)\mathrm{d}z = F(t_0) + G(\gamma(t)) - G(\gamma(t_0)) = G(\gamma(t)).$$

De même si $t < t_0$, on obtient

$$F(t) = \int_{\gamma_{|[a,t_0]}} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{|[t,t_0]}} f(z)\mathrm{d}z = F(t_0) - (G(\gamma(t_0)) - G(\gamma(t))) = G(\gamma(t)).$$

Ce qui prouve que F est bien une intégrale de f le long de γ. □

Cela nous permet de donner la définition suivante qui est donc compatible avec la définition III.1

Définition VI.5. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une application continue, alors *l'intégrale complexe de f le long de γ* est le nombre complexe

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$$

où F désigne une primitive de f le long de γ.

Remarques VI.6. — i) Par l'assertion b) de la proposition VI.2, cela ne dépend pas du choix de la primitive F.

ii) Notons que l'application de $\mathscr{H}(U)$ dans $\mathbf{C}$ donnée par $\gamma \mapsto \int_\gamma f$ est linéaire.

iii) Avec les notations de la définition, si $c \in [a,b]$, on a la relation

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_{|[a,c]}} f + \int_{\gamma_{|[c,d]}} f.$$

Proposition VI.7. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $a < b$ et $c < d$. Soient $\gamma : [a,b] \to U$ et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ des applications continues. Alors*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f = \int_{\gamma_{|[\varphi(c),\varphi(d)]}} f.$$

Démonstration. — Soit F une primitive de f le long de γ. Alors $F \circ \varphi$ est une primitive de f le long de $\gamma \circ \varphi$. Donc

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f = F\circ\varphi(d) - F\circ\varphi(c) = \int_{\gamma_{|[\varphi(c),\varphi(d)]}} f.$$ □

Corollaire VI.8. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soient γ_1 et γ_2 des chemins juxtaposables dans U, Alors*

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente, de la définition de la juxtaposition des chemins et de la remarque VI.6 iii). □

VI.2. Invariance par homotopie

Rappelons que la notion d'homotopie est décrite dans l'appendice A3.

Théorème VI.9. — *Soient U un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et* $f \in Hol(U)$. *Soient* γ_1 *et* γ_2 *des chemins* strictement *homotopies dans* U, *alors*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

La preuve ressemble beaucoup à la preuve de la formule intégrale de Cauchy.

Démonstration. — Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ une homotopie stricte de γ_1 à γ_2. Soit $K = H([0,1]^2)$. C'est une partie compacte de U. Pour tout $x \in U$, il existe un nombre $r_x \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(x, r_x) \subset U$. Par définition de la compacité, il en résulte qu'il existe des familles finies $(z_i)_{i\in I}$ de points de K et $(r_i)_{i\in I}$ de nombres réels strictement positifs telles que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} B(z_i, r_i) \subset U.$$

Pour $i \in I$, on pose $U_i = H^{-1}(B(z_i, r_i))$ qui est une partie ouverte de $[0,1]^2$.

Lemme VI.10. — *Il existe un entier* $n \in \mathbf{N}$ *tel que*

$$\forall (k,l) = \{1, \dots 2^n\}^2, \exists i \in I, \quad \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \times \left[\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right] \subset U_i. \tag{10}$$

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. S'il n'existe pas de tel entier n, cela signifie qu'il existe une suite $(k_n, l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'entiers tels que

$$\forall i \in I, \qquad \left[\frac{k_n-1}{2^n}, \frac{k_n}{2^n}\right] \times \left[\frac{l_n-1}{2^n}, \frac{l_n}{2^n}\right] \not\subset U_i.$$

Comme $[0,1]^2$ est compact, on peut extraire de la suite $\left(\frac{k_n}{2^n}, \frac{l_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite $\left(\frac{k_{\varphi(n)}}{2^{\varphi(n)}}, \frac{l_{\varphi(n)}}{2^{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un couple (t,u). Soit $i_0 \in I$ tel que $(t,u) \in U_{i_0}$. Il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$[0,1]^2 \cap \left]t-\eta, t+\eta\right[\times \left]u-\eta, u+\eta\right[\subset U_{i_0}.$$

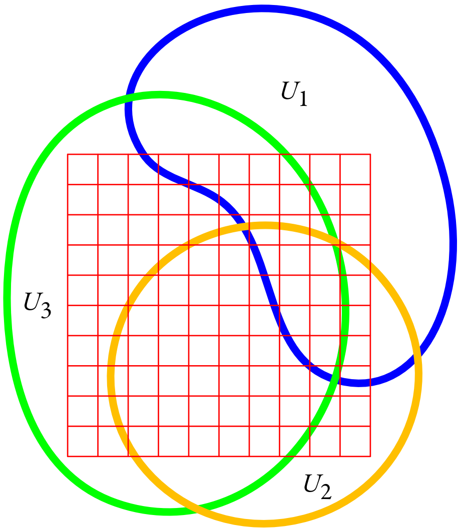

FIGURE 12. Carrés dans un recouvrement ouvert

Soit alors $N \in \mathbf{N}$ tel que $2^{-\varphi(N)} < \frac{\eta}{2}$, $|\frac{k_{\varphi(N)}}{2^{\varphi(N)}} - t| < \frac{\eta}{2}$ et $\frac{l_{\varphi(N)}}{2^{\varphi(N)}} - u| < \frac{\eta}{2}$. Alors

$$\left[\frac{k_{\varphi(N)} - 1}{2^{\varphi(N)}}, \frac{k_{\varphi(N)}}{2^{\varphi(N)}}\right] \times \left[\frac{l_{\varphi(N)} - 1}{2^{\varphi(N)}}, \frac{l_{\varphi(N)}}{2^{\varphi(N)}}\right] \subset U_{i_0}$$

ce qui contredit la définition de la suite $(k_n, l_n)_{n \in \mathbf{N}}$. □

Fin de la preuve du théorème VI.9. — Pour tout $i \in I$, on note G_i une primitive de f sur $B(z_i, r_i)$, donnée par le corollaire III.20. Si $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ avec $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant 1$ et $0 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant 1$ on note ∂_C le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} (a_1 + (b_1 - a_1)4t, a_2) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ (b_1, a_2 + (b_2 - a_2)(4t - 1)) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ (b_1 + (a_1 - b_1)(4t - 2), b_2) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ (a_1, b_2 + (a_2 - b_2)(4t - 3)) \text{si } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Soient $c_1 \in [a_1, b_1]$ et $c_2 \in [a_2, b_2]$ On peut alors découper le rectangle C en 4 en considérant les rectangles $C_{0,0} = [a_1, c_1] \times [a_2, c_2]$, $C_{1,0} = [c_1, b_1] \times [a_2, c_2]$, $C_{0,1} = [a_1, c_1] \times [c_2, b_2]$ et

$C_{1,1} = [c_1, b_1] \times [c_2, b_2]$. Alors

$$\int_{H\circ\partial_C} f = \sum_{(i,j)\in\{0,1\}^2} \int_{C_{i,j}} f. \tag{11}$$

On se donne maintenant un entier n vérifiant la condition (10). Pour tout $k, l \in \{1, \dots, 2^n\}$, on pose

$$B_{k,l} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \times \left[\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right]$$

alors, comme l'homotopie est stricte,

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{H\circ\partial_{[0,1]^2}} f = \sum_{(k,l)\in\{1,\dots 2^n\}^2} \int_{H\circ B_{k,l}} f,$$

où la seconde équalité résulte pas récurrence de la formule (11). Par le choix de n, pour tous $k, l \in \{1, \dots, 2^n\}$, il existe $i \in I$ tel que $H(B_{k,l}) \subset B(z_i, r_i)$. On peut donc appliquer l'assertion c) de la proposition III.3 avec la fonction G_i. Comme $\partial_{B_{k,l}}$ est un lacet, on obtient $\int_{H\circ\partial_{B_{k,l}}} f = 0$, ce qui implique l'égalité entre les deux intégrales. □

Corollaire VI.11. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $a \in U$. il existe une unique application $\mathrm{Int}_f : \pi_1(U, a) \to \mathbf{C}$ tell que*

$$\mathrm{Int}_f([\gamma]) = \int_\gamma f$$

pour tout lacet γ d'origine a. Cette application est un morphisme de groupes.

Démonstration. — L'unicité résulte de la surjectivité de la projection canonique, l'existence du théorème précédent. Le fait que l'application est un morphisme de groupes découle du corollaire VI.8. □

Corollaire VI.12. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. On suppose que U est* simplement connexe *alors pour tout lacet γ dans U,*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Démonstration. — En effet, par définition si U est simplement connexe, le groupe $\pi_1(U, a)$ est réduit à l'élément neutre pour tout $a \in U$. On peut alors appliquer le corollaire précédent. □

Corollaire VI.13. — *Soit $a \in \mathbf{C}$ et soit γ un lacet dans $\mathbf{C} - \{a\}$ alors*

$$\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Démonstration. — Posons $b = \gamma(0) = \gamma(1)$. Soit $m = \mathrm{Ind}_a(\gamma)$. Par définition de l'indice la classe de γ dans $\pi_1(\mathbf{C} - \{a\}, b)$ est égal à celle du chemin $t \mapsto e^{2\pi m t i}$ et donc à m fois celle du chemin $\sigma_1 : t \mapsto a + (b-a)e^{2\pi t i}$. Il résulte alors du corollaire VI.11 que

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = m\int_{\sigma_1} \frac{1}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = m\int_0^1 \frac{1}{(b-a)e^{2\pi t i}} 2\pi\mathrm{i}(b-a)e^{2\pi t i}\mathrm{d}t = m. \qquad \square$$

VI.3. Théorème des résidus

Théorème VI.14. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{M}(U)$. Soit γ un lacet dans U tel que*

(i) *L'image de γ ne contient pas de pôle de f ;*

(ii) *La classe de γ est nulle dans $\pi_1(\gamma, \gamma(0))$.*

Alors

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f = \sum_{a \in U} \mathrm{Ind}_a(\gamma) \times \mathrm{Rés}_a(f).$$

Remarque VI.15. — Si $a \in \Gamma([0,1])$, alors l'indice de γ en a n'est pas défini, mais, par hypothèse, le nombre a n'est alors pas un pôle de f et $\mathrm{Rés}_a(f) = 0$. D'autre part la preuve assure que la somme ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. — Soit H une homotopie stricte de γ à $e_{\gamma(0)}$ dans U et soit $K = \gamma([0,1]^2)$. C'est une partie compacte de U. Si a est un pôle de f en dehors de K, alors $K \subset \mathbf{C} - \{a\}$; donc H est une homotopie stricte de γ à $e_{\gamma(0)}$ dans $\mathbf{C} - \{a\}$. Donc $[\gamma]$ est trivial dans $\pi_1(\mathbf{C} - \{a\}, \gamma(0))$ et $\mathrm{Ind}_a(\gamma) = 0$. Donc si $a \in U$ vérifie $\mathrm{Ind}_a(\gamma) \times \mathrm{Rés}_a(f) \neq 0$, alors $a \in f^{-1}(\{\infty\}) \cap K$. Comme l'ensemble des pôles de f est localement fini, cette intersection est finie.

Quitte à remplacer U par $U - \{z \in U - K \mid f(z) = \infty\}$ qui est ouvert puisque l'ensemble des pôles est fermé dans U, on se ramène au cas où l'ensemble des pôles de f est fini. En considérant la partie polaire de f en chacun de ces pôles, on peut écrire

$$f = h + \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{(z-a_i)^{n_i}}$$

où I est un ensemble fini, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes non nuls, $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, $(n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers strictement positifs et $h \in \mathscr{H}(U)$.

Comme les deux termes de l'égalité sont linéaires en f, il suffit de vérifier la formule pour chacun des termes de la somme.

Par le corollaire VI.11,

$$\int_\gamma h(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = 0 = \sum_{a\in U}\mathrm{Ind}_a(\gamma)\mathrm{Rés}_a(h).$$

Par le corollaire VI.13,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{Ind}_a(\gamma) = \sum_{a\in U}\mathrm{Ind}_a(\gamma)\mathrm{Rés}_a\left(\frac{1}{z-b}\right).$$

Si $f = \frac{1}{(z-b)^n}$ avec $n \geqslant 2$, alors $f = g'$ avec $g = \frac{-1}{(n-1)(z-a)^{n-1}}$. Donc

$$\int_\gamma f = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)) = 0 = \sum_{a\in U}\mathrm{Ind}_a(\gamma)\mathrm{Rés}_a(f).$$

□

VI.4. Un exemple d'application

Pour une fonction $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ intégrable et telle que $\int_{\mathbf{R}}|f| < +\infty$, on peut définir sa transformée de Fourier comme la fonction $\mathscr{F}f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par

$$y \longmapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x.$$

Soit $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ l'application $x \mapsto e^{-\pi x^2}$. Démontrons que $\mathscr{F}f = f$. Tout d'abord, pour $y \in \mathbf{R}$, on peut réecrire

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+iy)^2}e^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}x\\
&= e^{-\pi y^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+iy)^2}\mathrm{d}x\\
&= e^{-\pi y^2}\lim_{R\to+\infty}\int [-R+iy, R+iy]e^{-\pi z^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

VI.5. Primitive des fonctions holomorphes

Théorème VI.16. — *Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $a \in U$ et S un ensemble de lacets d'origine a dont les classes engendrent $\pi_1(U, a)$. Alors l'application f admet une primitive F sur U, c'est-à-dire une application $F \in \mathscr{H}(U)$ telle que $F' = f$, si et seulement si*

$$\int_\gamma f = 0$$

pour tout $\gamma \in S$.

Exemple VI.17. — L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbf{C}^*$ puisque

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}.$$

Corollaire VI.18. — *Si U est simplement connexe (e.g. contractile), tout $f \in \mathscr{H}(U)$ admet une primitive sur U.*

Preuve du théorème. — Supposons tout d'abord que l'application f admet une primitive sur U. Soit γ un lacet dans U, alors $F \circ \gamma$ est une primitive de f le long de γ et

$$\int_\gamma f = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\int_\gamma f = 0$ pour $\gamma \in S$. Soit γ un lacet dans U d'origine a. Comme par hypothèse les classes des éléments de S engendrent la groupe $\pi_1(U, a)$, il existe une famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ d'éléments de S et une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ de sorte que

$$[\gamma] = [\gamma_1]^{\varepsilon_1} * \cdots * [\gamma_n]^{\varepsilon_n}.$$

Par le corollaire VI.11,

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_{\gamma_i} f = 0.$$

Soit $z \in U$. Comme U est connexe et ouvert et donc connexe par arcs, il existe des chemins d'origine a et de terme z. Soient γ_1 et γ_2 de tels chemins. Alors $\gamma * \overline{\gamma}_2$ est un lacet d'origine a. On obtient donc les égalités

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 * \overline{\gamma}_2} f = 0.$$

Donc $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. Autrement dit, il existe une unique application $F : U \to \mathbf{C}$ telle que

$$F(\gamma(1)) = \int_\gamma f$$

pour tout chemin γ dans U d'orogine a.

Vérifions que F est une primitive de f. Soit $b \in U$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(b,r) \subset U$. Soit G une primitive de f sur $B(b,r)$, fournie par le corollaire III.20. Soit γ un chemin de a à b dans U. Si $z, z' \in \mathbf{C}$, on note, par abus de langage, $[z,z']$ le chemin $t \mapsto (1-t)z+tz'$. Pour tout $z \in B(b,r)$, le chemin $\gamma * [b,z]$ est un chemin dans U d'origine a et de terme z. Donc $F(z) = \int_{\gamma*[b,z]} f$. On obtient donc la formule

$$\frac{F(z)-F(b)}{z-b} = \frac{\int_{[b,z]} f}{z-b} = \frac{G(z)-G(b)}{z-b}$$

et ce quotient tend vers $f(b)$ quand z tend vers b. □

VI.6. Logarithmes et racines n-èmes de fonctions holomorphes

Proposition VI.19. — *Soit U un ouvert* simplement connexe *de* $\mathbf{C}$. *Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ une fonction qui ne s'annule pas sur U, alors il existe une application $h \in \mathscr{H}(U)$ telle que $f = \exp \circ h$.*

Démonstration. — On peut supposer que $U \neq \emptyset$. Soit $a \in U$. Soit h une primitive de $\frac{f'}{f}$ telle que $\exp(h(a)) = f(a)$. Alors les égalités

$$\left(\frac{\exp \circ h}{f}\right)' = \frac{h'f - f'}{f^2} \exp \circ h = 0$$

impliquent que le quotient $\frac{\exp \circ h}{f}$ est constant. Comme il vaut 1 en a, l'application h convient. □

Corollaire VI.20. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, pour tout entier n strictement positif, il existe $g \in \mathscr{H}(U)$ telle que $f = g^n$.*

Démonstration. — Avec les notations de la proposition précédente, il suffit de prendre $g = \exp \circ \left(\frac{h}{n}\right)$. □

Exercices

Exercice VI.1. On considère la fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$ définie par $z \mapsto \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}$. Pour un nombre réel r strictement positif, on note $C^+(0,r)$ le chemin donné par $t \mapsto re^{\pi t \mathrm{i}}$.

1. Déterminer $|f(z)|$ pour $z \in \mathbf{C}$.
2. Prouver que pour tout $\delta < \frac{\pi}{2}$,
$$\left| \int_{C^+(0,r)} f(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant 2\delta + \pi e^{R\sin(\delta)}.$$
3. Prouver que
$$\int_{C^+(0,\rho)} \frac{e^{\mathrm{i}z}-1}{z}\mathrm{d}z$$
tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0.
4. Calculer
$$\int_{C^+(0,\rho)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$
5. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

VII. Limites de fonctions holomorphes

VII.1. Suites de fonctions holomorphes

Théorème VII.1. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}(U)$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers une application f, alors*

a) *L'application f est holomorphe sur U ;*

b) *La suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la dérivée f' sur tout compact de U, il en est de même des suites des dérivées itérées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ pour tout $k \geqslant 0$;*

c) *Pour tout $a \in U$, le k-ème coefficient du développement de Taylor $\mathrm{DT}_a(f)$ est la limite du k-ème coefficient de $\mathrm{DT}_a(f_n)$.*

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Pour cela nous allons démontrer que f vérifie la formule intégrale de Cauchy et appliquer la proposition III.15. Soient $a \in U$, $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$ et soit $b \in B(a,r)$. Comme les applications f_n sont holomorphes pour $n \in \mathbf{N}$, elles vérifient la formule de Cauchy :

$$f_n(b) = \int_{C(a,r)} \frac{f_n(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}. \tag{12}$$

Comme la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est compacte, la suite $(f_{n|\overline{B}(a,r)}$ converge uniformément vers $f_{|\overline{B}(a,r)}$. Soit $\varepsilon > 0$ Il existe donc un entier N tel que pour $n \geqslant N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon(r-|b-a|)}{r}$$

pour $z \in \overline{B}(a,r)$. Or $|z-b| \geqslant r - |b-a|$ pour $z \in C(a,r)$. Donc

$$\left|\int_{C(a,r)} \frac{f_n z}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} - \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que $\int_{C(a,r)} \frac{f_n z}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$ converge vers $\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$ Par passage à la limite, l'égalité (12) fournit l'égalité

$$f(b) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Par suite, l'application f vérifie l'égalité de Cauchy. Elle est donc holomorphe.

Pour prouver l'assertion , nous allons d'abord généraliser la formule de la remarque **??**

Lemme VII.2. — *Soient $g \in \mathscr{H}(U)$, $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $b \in B(a,r)$,*

$$\frac{f^{(k)}(b)}{k!} = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Démonstration. — Le développement de Taylor de f en b s'écrit $\mathrm{DT}_b(f) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} T^n$ Donc le résidu en b de la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}$ est $\frac{f^n(b)}{n!}$. Donc le lemme résulte de la formule des résidus VI.14. □

Notation VII.3. — Soient X un espace topologique, K une partie compacte de X et $f : X \to \mathbf{C}$ une application continue, on note

$$\|f\|_K = \max_{x\in K} |f(x)|.$$

Cela définit une norme sur l'espace des applications continues de K dans $\mathbf{C}$.

Fin de la preuve du théorème. — Démontrons l'assertion VII.1. Soient $k \in \mathbf{N}$, $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Soit $b \in B(a,r)$. Alors par le lemme qui précède

$$\left|f_n^{(k)}(b) - f_n^{(k)}(a)\right| = k! \left|\int_{C(a,r)} \frac{(f-f_n)(z)}{(z-b)^{k+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}\right| = k! \frac{\|f-f_n\|_{C(a,r)}}{(r-|b-a|)^{k+1}} r$$

Il en résulte que si $r' \in \left]0,r\right[$, alors pour tout $b \in \overline{B}(a,r')$,

$$\left|f_n^{(k)}(b) - f_n^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{k!r}{(r-r')^{k+1}} \|f-f_n\|_{C(a,r)}. \tag{13}$$

Donnons-nous maintenant une partie compacte K de U. Pour tout $a \in K$, on choisit un nombre réel $r_a > 0$ tel que $B(a, 3r_a) \subset U$ Alors $r_a < 2r_a$ et $\overline{B}(a, 2r_a) \subset U$. Comme $K \subset \bigcup_{a\in K} B(a, r_a)$ et que K est compact, il existe une partie finie $I \subset K$ telle que

$$K \subset \bigcup_{a\in I} B(a, r_a)$$

Pour tout $z \in K$, il découle alors de la majoration 13 la majoration

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leqslant 2k! \max_{a\in I} \left(\frac{\|f_n - f\|_{C(a,r_a)}}{r_a^k}\right).$$

L'ensemble I étant fini et la suite f_n convergeant uniformément sur tout compact, le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite d'applications $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur le compact K.

L'assertion c) découle de l'assertion VII.1 et de la formule pour les coefficients du développement de Taylor (corollaire II.14). □

VII.2. Théorème de Hurwitz

***Théorème VII.4* (Hurwitz). —** *Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications holomorphes injectives sur U qui converge uniformément sur tout compact de U. Alors la limite est injective ou constante.*

Démonstration. — Notons f la limite de la suite et raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas constante et qu'il existe deux nombres distincts $a, b \in U$ tels que $f(a) = f(b)$. Comme f n'est pas constante et que U est connexe, l'application f n'est pas constante au voisinage de a. Il résulte alors de la forme locale des applications holomorphes (théorème IV.16) qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall z \in B(a, 2r), \quad f(z) \neq f(a) = f(b).$$

En particulier $b \notin B(a, 2r)$ et

$$\delta = \min_{z\in C(a,r)} (|f(z) - f(b)|) > 0.$$

Comme $f_n - f_n(b)$ converge uniformément vers $f - f(b)$ sur le compact $C(a, r)$, il existe N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $|f_n(z) - f_n(b)| > \frac{\delta}{2}$ pour tout $z \in C(a, r)$. Comme f_n est supposée injective l'application $z \mapsto \frac{1}{f_n(z)-f_n(b)}$ est holomorphe sur $U - \{b\}$ qui contient $B(a, r)$ et on peut lui appliquer le principe du maximum (théorème IV.7) ce qui prouve que, si $n \geqslant N$, $|f_n(z) - f_n(b)| \geqslant \frac{\delta}{2}$ pour $z \in B(a, r)$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $|f(a) - f(b)| \geqslant \frac{\delta}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse $f(a) = f(b)$. □

VII.3. Application aux séries. — Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent aux séries de fonctions holomorphes.

***Théorème VII.5.* —** *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout compacte de U. Alors*

a) *L'application f est holomorphe sur U ;*

b) *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact de U.*

c) *Pour tout $a \in U$ et tout $k \in \mathbf{N}$, le k-ème coefficient du développement de Taylor* $\mathrm{DT}_a(f)$ *est la somme des k-èmes coefficients de* $\mathrm{DT}_a(f_n)$.

Démonstration. — On applique le théorème VII.1 à la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$. □

Remarque VII.6. — Cela s'applique aussi aux familles sommables $(f_i)_{i\in I}$ pour un ensemble dénombrable I, si la convergence est uniforme sur tout compact, c'est-à-dire que pour tout compact K de U et pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $J \subset I$ fini tek que pour toute partie finie J' de I contenant J, on a la majoration

$$\forall z \in K, |f(z) - \sum_{j\in J'} f_j(z)| < \varepsilon.$$

En particulier, cela vaut si on a convergence normale sur tout compact K, autrement dit $\sum_{i\in I} \|f_i\|_K < +\infty$.

VII.4. Produits infinis. — Pour les produits infinis, nous pourrions donner un énoncé strictement analogue aux précédents, mais mous allons en fait donner un critère qui assure la convergence uniforme des produits partiels sur tout compact.

Théorème VII.7. — *Soit U unouvert de $\mathbf{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |f_n - 1|$ converge uniformément sur tout compact de U. Alors*

a) *La suite $(\prod_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U ;*

b) *La limite, notée $f = \prod_{k=0}^{+\infty} f_k$ est holomorphe*

c) $\overset{-1}{f}(\{0\}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{-1}{f}_n(\{0\})$ *et pour tout $a \in U$, $v_a(f) = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_a(f_n)$;*

d) *Sur tout compact de $U - \overset{-1}{f}(\{0\})$, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f_n'}{f_n}$ converge uniformément vers $\frac{f'}{f}$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'analogue des assertions b), b) et c) sont vérifiées pour un produit fini de fonctions.

Soit K une partie compact de U. Comme dans la preuve du théorème VII.1, pour tout $a \in K$, on choisit $r_a \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, 3r_a) \subset U$ et un partie finie I de K telle que $K \subset \bigcup_{a\in I} B(a, r_a)$. On note alors $V = \bigcup_{a\in I} B(a, r_a)$ qui est une partie ouverte de $\mathbf{C}$ et $K' = \bigcup_{a\in I} \overline{B}(a, 2r_a)$ qui est une partie compacte de $\mathbf{C}$. Ces parties vérifient les inclusions $K \subset V \subset K' \subset U$.

Comme la série $\sum_{n\in\mathbf{N}}|f_n-1|$ converge uniformément sur K', l'égalité

$$\|f_n-1\|_{K'}=\left\|\sum_{k=0}^{n}|f_k-1|-\sum_{k=0}^{n-1}|f_k-1|\right\|$$

implique que $\|f_n-1\|_{K'}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En particulier, on peut choisir n_0 tel que $\|f_n-1\|_{K'}\leqslant\frac{1}{2}$ pour $n\geqslant n_0$.

En appliquant la remarque initiale au produit de n_0 applications

$$f_0\times f_1\times\cdots\times f_{n_0-1}\times\left(\prod_{k=n_0}^{+\infty}f_k\right)$$

on se ramène à prouver les assertions pour les restrictions de f_n à V dans le cas où $\|f_n-f\|_{K'}\leqslant\frac{1}{2}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. En particulier, les applications f_n ne s'annulent pas sur K'.

La majoration $\|f_n-1\|_{K'}\leqslant\frac{1}{2}$ donne les inclusions $f_n(K')\subset B(1,\frac{1}{2})\subset\mathbf{C}-]-\infty,0]$. Donc $f_n=\exp\circ\operatorname{Log}\circ f_n$ sur K' et

$$\prod_{k=0}^{n}f_k=e^{\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Log}\circ f_k}.$$

Or l'inégalité des accroissements finis (théorème I.15) donne la majoration

$$|\operatorname{Log}(z)|=|\operatorname{Log}(z)-\operatorname{Log}(1)|\leqslant\max_{z\in B\left(1,\frac{1}{2}\right)}\left(\left|\frac{1}{z}\right|\right)\times|z-1|=2|z-1|$$

pour tout $z\in B(1,\frac{1}{2})$. Donc $|\operatorname{Log}\circ f_k(z)|\leqslant 2|f_k(z)-1|$ si $z\in K'$' Donc la série $\sum_{k\in\mathbf{N}}|\operatorname{Log}\circ f_k|$ converge uniformément sur K'. En particulier, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}|\operatorname{Log}\circ f_k|\right\|_{K'}\leqslant C$$

pour tout $n\in\mathbf{N}$. L'inégalité des accroissements finis assure que $|exp(x)-\exp(y)|\leqslant\exp(C)|x-y|$ pour tous $x,y\in\overline{B}(0,C)$. Il en résulte que la suite des produits partiels $(\prod_{k=0}^{n}f_k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur K' et donc sur V. Par le théorème VII.1, l'application limite f est holomorphe sur V. Sur V,

$$f=\exp\circ\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{Log}\circ f_n\right)$$

ce qui prouve que f ne s'annule pas sur V Comme $v_a(f_n) = 0$ pour $a \in K'$ et $n \in \mathbf{N}$, l'assertion c) est vérifiée sur V. En outre, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Log} \circ f_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur K' telle que $\exp \circ g = f$. Par conséquent la somme des dérivées $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f_n'}{f_n}$ converge uniformément sur tout compact de V vers la dérivée g'. Comme $f' = g' \exp(g) = g' f$, on obtient que $g' = \frac{f'}{f}$, ce qui prouve l'assertion d) pour K. □

VII.5. Limites de fonctions méromorphes

Théorème VII.8. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur U. On fait en outre les hypothèses suivantes*

(i) *L'ensemble $S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{-1}{f}_n(\{\infty\})$ est localement fini dans U ;*

(ii) *Pour tout $s \in S$, l'ensemble $\{\, v_s(f_n),\ n \in \mathbf{N} \,\}$ est minoré;*

(iii) *La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $U - S$ vers une application f.*

Alors

a) *L'application f se prolonge par continuité en une fonction méromorphe sur U ;*

b) *La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les conditions (i) et (ii) et converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact de $U - S$;*

c) *Pour tous $k \in \mathbf{Z}$ et $a \in U$, le k-ème coefficient du développement de Laurent $\mathrm{DL}_a(f)$ est la limite de k-èmes coefficients de Laurent $\mathrm{DL}_a(f_n)$. En particulier $\mathrm{Rés}_a(f)$ est la limite de la suite $\mathrm{Rés}_a(f_n)$.*

Démonstration. — Le théorème VII.1 assure que $f \in \mathscr{H}(U - S)$ et la convergence sur $U - S$ dans l'assertion b). En outre si $s \in S$, l'inégalité $v_s(f'n) \geqslant \min(0, v_s(f_n) - 1)$ prouve que f' vérifie les conditions (i) et (ii).

Il reste à démontrer les assertions a) et ?? en tout point de S. Soit $s \in S$. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(s, 2r) \subset U$ et $B(s, 2r) \cap S = \{s\}$. Par l'hypothèse (ii), il existe un entier $M \in \mathbf{N}$ tel que $v_s(f_n) \geqslant -M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose alors $g_n = (z - s)^M f_n$ qui holomorphe sur $B(s, 2r)$. Comme $C(s, r) \subset U - S$, le principe du maximum nous donne les majorations

$$\|g_p - g_q\|_{\overline{B}(s,r)} \leqslant \|g_p - g_q\|_{C(s,r)} \leqslant r^M \|f_p - f_q\|_{C(s,r)}$$

Par le critère de Cauchy, la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $B(s, r)$ qui est holomorphe par le théorème VII.1. Cela prouve que f se prolonge en une fonction méromorphe en s et $\mathrm{DL}_s(f) = T^{-M} \mathrm{DT}_s(g)$ ce qui fournit l'assertion ?? en s. □

Corollaire VII.9. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications méromorphes sur U qui vérifient les hypothèses suivantes :*

(i) *L'ensemble $S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{-1}{f}_n(\{\infty\})$ est localement fini dans U ;*

(ii) *Pour tout $s \in S$, l'ensemble $\{v_s(f_n),\ n \in \mathbf{N}\}$ est minoré ;*

(iii) *La série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout compact de $U - S$.*

Alors

a) *La fonction f se prolonge en une fonction méromorphe sur U ;*

b) *Pour $k \in \mathbf{N}$, les suites $f_n^{(k)}$ vérifient les conditions (i) et (ii) et la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact de $U - S$;*

c) *Si $a \in U$, le k-ème coefficient du développement de Laurent $\mathrm{DL}_a(f)$ est la somme des k-èmes coefficients de $\mathrm{DL}_a(f_n)$.*

Proposition VII.10. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur U telles que pour tout compact K de U, les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *Il existe un entier N_K tel que $\overset{-1}{f}_n(\{\infty\}) \cap K = \emptyset$ lorsque $n \geqslant N_K$;*

(ii) *La série $\sum_{n\geqslant N_K} |f_n - 1|$ converge uniformément sur K.*

Alors, soit $S = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overset{-1}{f}_n(\{\infty\})$

a) *L'ensemble S est localement fini ;*

b) *La suite des produits partiels $(\prod_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $U - S$;*

c) *La limite f sétend en une fonction méromorphe sur U et l'ensemble des pôles de f est contenu dans S ;*

d) *Pour tout $a \in U$, $v_a(f) = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_a(f_n)$;*

e) *La série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f_n'}{f_n}$ converge uniformément vers $\frac{f'}{f}$ sur tout compact de $U - \bigcap \overset{-1}{f}_n(\{0,\infty\})$.*

Démonstration. — Soient $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{B}(a,r) \subset U$. On pose $N = N_{\overline{B}(a,r)}$. On applique le théorème VII.7 au produit de fonctions holomorphes $\prod_{n\geqslant N} f_n$ sur $B(a,r)$. On obtient ainsi une fonction holomorphe g qui vérifie l'analogue des assertions d) et e). La fonction méromorphe $f = g \times \prod_{k=0}^{N-1} f_k$ vérifie donc ces deux assertions. □

VII.6. Intégrales dépendant d'un paramètre

Notation VII.11. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit X un ensemble. Soit $f : U \times X \to \mathbf{C}$ une application. Soit $x \in X$. Si l'application $f_x : U \to \mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe, on note $\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ pour $f_x'(z)$.

Théorème VII.12. — *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Soit $f : U \times [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ une application telle que*

(i) *Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, l'application $f_t : U \to \mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe;*

(ii) *L'application f est continue.*

Alors la fonction $F : z \mapsto \int_\alpha^\beta F(z,t)\mathrm{d}t$ est holomorphe et sa dérivée est donnée par

$$F'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)\mathrm{d}t$$

pour $z \in U$. Plus généralement, $F^{(k)}(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^k F}{\partial z^k}(z,t)\mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbf{N}$ et $z \in U$.

Démonstration. — Nous allons à nouveau utiliser le critère d'holomorphie donné par la proposition III.15. Soient $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Soit $b \in B(a,r)$. Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, on a la relation

$$f(b,t) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z,t)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}.$$

Comme l'application $t \mapsto a + re^{2\pi t \mathrm{i}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le théorème de Fubini, pour obtenir les égalités

$$\begin{aligned} F(b) = \int_\alpha^\beta f(b,t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta \int_{C(a,r)} \frac{f(z,t)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}t \\ &= \int_{C(a,r)}\int_\alpha^\beta \frac{f(z,t)}{z-b}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_{C(a,r)} \frac{F(z)}{z-b}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Donc l'application F vérifie la formule de Cauchy et elle est holomorphe. En outre, en appliquant à nouveau le théorème de Fubini, sa dérivée est donnée par :

$$F'(b) = \int_{C(a,r)} \frac{F(z)}{(z-b)^2} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \int_{C(a,r)} \int_\alpha^\beta \frac{f(z,t)}{(z-b)^2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{C(a,r)} \frac{f(z,t)}{(z-b)^2} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\mathrm{d}t.$$

Les autres assertions s'en déduisent. □

Pour traiter des intégrales plus générales, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème VII.13. — *Soit X un espace muni d'une mesure μ. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications mesurables à valeurs complexes sur X telle que*

(i) *La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une application $f : X \to \mathbf{C}$;*

(ii) *Il existe une application $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ telle que*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Alors l'application f appartient à $\mathscr{L}^1(X,\mu)$ et $\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En particulier, $\int_X f_n \mathrm{d}\mu$ tend vers $\int_X f\mathrm{d}\mu$ quand n tend vers $+\infty$.

En appliquant ce théorène nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème VII.14. — *Soit X un espace muni d'une mesure μ. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f : U \times X \to \mathbf{C}$ une application telle que*

(i) *Pour tout $x \in X$ l'application $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe;*

(ii) *Pour tout $z \in U$, l'application $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable;*

(iii) *Pour tout $a \in U$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $B(a,r) \subset U$ et $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ tels que*
$$\forall x \in X, \forall z \in B(a,r), \quad |f(z,x)| \leqslant g(x).$$

Alors l'application $F : z \mapsto \int_X f(z,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est holomorphe sur U. En outre l'application $(z,x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ vérifie les conditions (i) à (iii) et

$$\forall z \in U, \quad F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Plus généralement, $F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)\mathrm{d}\mu(x)$ pour tout $z \in U$.

Démonstration. — Pour tout $x \in X$ et tout $a \in U$, le taux d'accroissement $\frac{f(z,x)-f(a,x)}{z-a}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial z}(a,x)$ quand z tend vers a. Pour $z \neq a$, l'application $x \mapsto \frac{f(z,x)-f(z,a)}{z-a}$ est mesurable donc l'application $x \mapsto \partial f \partial z(a,x)$ est mesurable comme limite d'applications mesurables.

Soient $a \in U$, $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ tels que $B(a,3r) \subset U$ et

$$\forall x \in X, \forall z \in B(a,3r), \quad |f(z,x)| \leqslant g(x).$$

Alors la formule de Cauchy nous donne l'inégalité

$$\forall z \in B(a,r), \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\right| \leqslant \frac{1}{r}||f(\bullet,x)||_{C(a,2r)} \leqslant \frac{1}{r}g(x).$$

Donc en appliquant le théorème de convergence dominée VII.13 et le critère séquentiel pour la limite d'une fonction en un point, L'intégrale $\int_X \frac{f(z,x)-f(a,x)}{z-a}\mathrm{d}\mu(x)$ converge vers $\int_X \frac{\partial f}{\partial z}(a,x)\mathrm{d}\mu(x)$ quand z tend vers a. □

En ce qui concerne les fonctions méromorphes on dispose du résultat suivant :

Théorème VII.15. — *Soit X un espace muni d'une mesure μ. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit f : $U \times X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une application telle que*

(i) *Pour tout $x \in X$, l'application $f(\bullet,x) : z \mapsto f(z,x)$ est méromorphe ;*

(ii) *Il existe un ensemble $S \subset U$ localement fini tel que pour tout $x \in X$, l'ensemble des pôles de $f(\bullet,x)$ est contenu dans S ;*

(iii) *Pour tout $s \in S$, il existe un entier $a_s \in \mathbf{Z}$ tel que $v_s(f(\bullet,x)) \geqslant a_s$ pour tout $x \in X$;*

(iv) *Pour tout $z \in U - S$ l'application $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable ;*

(v) *Pour tout $a \in U - S$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $B(a,r) \subset U - S$ et $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ tel que*

$$\forall z \in B(a,r), \forall x \in X, \quad |f(x,z)| \leqslant g(t).$$

Alors l'application de $U - S$ dans $\mathbf{C}$ donnée par $z \mapsto \int_X f(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur U. En outre l'application $\frac{\partial f}{\partial z}$ de X dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ vérifie les conditions (i) à (v) et

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

pour tout $z \in U - S$. Plus généralement pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $z \in U$, le k-ème coefficient de $\mathrm{DL}_a(F)$ est obtenu en intégrant le k-ème coefficient de $f(\bullet,x)$.

Démonstration. — Compte tenu du résultat pour les applications holomorphes, il suffit de prouver le résultat au voisinage d'un point $s \in S$ et on se ramène au cas où $S = \{s\}$. □

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $\lambda = f'(0)$ satisfait $|\lambda| \in]0,1[$. On note $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_U$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f^{\circ n+1} = f \circ f^{\circ n}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$(1-\varepsilon)^n|z| \leqslant \left|\frac{f^{\circ n}(z)}{\lambda^n}\right| \leqslant (1+\varepsilon)^n|z|$$
pour tout $z \in B(0,r)$.
2. On pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f^{\circ n}$. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que la série
$$\sum_{n\in\mathbf{N}} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$
converge (on pourra commencer par majorer $|f(z) - \lambda z|$).
3. Démontrer qu'il existe une fonction holomorphe φ définie sur un ouvert W contenant 0 telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et
$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$$
pour tout $z \in W$.
4. Prouver qu'il existe un ouvert $W' \subset W$ contenant 0 et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que φ définit un isomorphisme bianalytique de W' sur $B(0,r)$
5. Soit $z \in W'$. Exprimer simplement $f^{\circ n}(z)$ à l'aide de φ et λ.
6. Soit $c \in \mathbf{C}$. On considère l'application polynômiale définie par $g : z \mapsto z^2 + c$.
   (a) Déterminer les points fixes de g, c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $g(z) = z$.
   (b) Soit z_0 un tel point fixe. À quelle condistion a-t-on $|g'(z_0)| \in]0,1[$.
   (c) Si la condition de la question précédente est vérifiée, prouver qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ et une application holomorphe $\varphi : B(z_0,r)$ telle que $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$ pour $z \in B(z_0,r)$.

VIII. Produits de Weierstrass

Cours

VIII.1. Formule de Jensen

Proposition VIII.1. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $a \in U$ tel que f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a, Soit $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k z^k$ le développement de* Taylor *de f en a. Si $r \in \mathbf{R}_+^*$ est tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$, alors*

$$\mathbf{E}_{C(a,r)}(\log|f|) = \log|a_{v_a(f)}| + v_a(f)\log(r) + \sum_{z\in B(a,r)-\{a\}} v_z(f)\log\left(\frac{r}{|z-a|}\right).$$

Remarque VIII.2. — Cette formule reste valide si f s'annule sur $C(a,r)$.

Démonstration. — On se ramène au cas où $a = 0$.

Supposons que f s'annule en $b \in C(0,r)$ et posons $m = v_b(f) \geqslant 1$ alors $f = C(z-b)^m(1+g(z))$ au voisinage de b, où $C \in \mathbf{C}^*$ et g est une application holomorphe qui s'annule en b. Donc

$$\log(|f(z)|) = m\log(|z-b|) + \log(|C(1+g(z))|)$$

ce qui prouve que l'intégrale définissant $\mathbf{E}_{C(a,r)}(\log|f|)$ converge.

Définissons f_ε par $z \mapsto f(z)\frac{(z-b(1+\varepsilon))^m}{(z-b)^m}$. Alors le terme de droite pour f_ε converge vers celui de f. En ce qui concerne le terme de gauche,

$$\mathbf{E}_{C(0,r)}(\log|f_\varepsilon|) - \mathbf{E}_{C(0,r)}(\log|f|) = \int_0^1 \log\left(\frac{|re^{2\pi\theta i} - b(1+\varepsilon)|}{|re^{2\pi\theta i} - b|}\right)d\theta$$

Mais $|re^{2\pi\theta i} - b(1+\varepsilon)|$ est décroissante en ε (*cf.* figure 13). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à cette intégrale, si bien que la différence tend vers 0.

Traitons maintenant quelques cas élémentaires :

- Si f est constante de valeur C, le termes de gauche et celui de droite valent $\log(|C|)$:
- Si $f = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$, alors le théorème de gauche vaut $\log(r)$ et celui de droite vaut $\log(1) + \log(r) = \log(r)$;

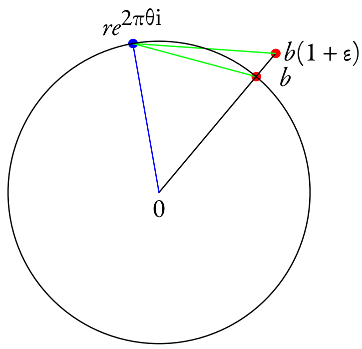

Figure 13. Déplacement d'un zéro

— Si f est donnée par

$$z \longmapsto \frac{\frac{z}{r} - \frac{b}{r}}{1 - \frac{\overline{b}}{r}\frac{z}{r}}$$

pour un nombre complexe $b \in B(0,r)$, alors f est une isomorphisme bianalytique de $B(0,r)$ sur $B(0,1)$, car c'est la composée de $z \mapsto \frac{z}{r}$ avec un automorphisme bianalytique de $\mathbf{D}$ (*cf.* théorème IV.10) et $log(|f(z)|) = 0$ pour $z \in C(0,r)$, si bien que le terme de gauche est nul. Quand au terme de droite, il vaut

$$\log\left(\frac{|b|}{r}\right) - \log\left(\frac{|b|}{r}\right) = 0.$$

— Si $g \in \mathscr{H}(U)$ ne s'annule pas dans $\overline{B}(0,r)$, alors on peut trouver $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ de sorte que $B(0,r+\varepsilon) \subset U$ et que g ne s'annule pas sur $B(0,r+\varepsilon)$. Par la proposition VI.19, il existe $h \in \mathscr{H}(B(0,R+\varepsilon))$ telle que $g = e^h$. Donc, par la formule du corollaire III.12,

$$\mathbf{E}_{C(0,r)}(\log|g|) = \mathbf{E}_{C(0,r)}(\Re(h)) = \Re(\mathbf{E}(h)) = \Re(h(0)) = \log(|g(0)|).$$

D'autre part, les deux termes sont additifs pour le produit de fonctions. En général, on écrit donc

$$f = gz^{v_0(f)} \prod_{b \in J} \left(\frac{\frac{z}{r} - \frac{b}{r}}{1 - \frac{\overline{b}}{r}\frac{z}{r}} \right)$$

où $J = B(0,r) \cap f^{-1}(\{0\})$ est un ensemble fini puisque $\overline{B}(0,r)$ est une partie compacte de U et g désigne une application holomorphe sur U qui ne s'annule pas dans $\overline{B}(0,r)$. La formule découle donc des cas particuliers considérés auparavant. □

On peut généraliser ce résultat aux fonctions méromorphes :

Proposition VIII.3. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, soient $f \in \mathscr{M}(U)$, $a \in U$ et $r \in Rpp$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur $B(a,r)$. Notons $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k z^k$ le développement* $\mathrm{DL}_a(f)$. *Alors*

$$\mathbf{E}_{C(a,r)}(\log|f|) = \log|a_{v_a(f)}| + v_a(f)\log(r) + \sum_{z\in B(a,r)-\{a\}} v_z(f)\log\left(\frac{r}{|z-a|}\right).$$

La preuve est essentiellement la même en introduisant des facteurs $\frac{1-\frac{\overline{b}}{r}\frac{z}{r}}{\frac{z}{r}-\frac{b}{r}}$ pour traiter les pôles de f.

Corollaire VIII.4. — *Avec les notations de la proposition VIII.1, Notons pour tout $r' \in \,]0,[r$,*

$$N(r') = \sum_{z\in B(a,r')} v_z(f).$$

Alors pour tout $\beta \in \,]1,+\infty[$, on a la majoration

$$N\left(\frac{r}{\beta}\right) \leqslant \frac{1}{\log(\beta)}\log\left(\frac{||f||_{C(a,r)}}{|\alpha_{v_a(f)}|r^{v_a(f)}}\right).$$

Démonstration. — De la proposition VIII.1, on déduit la majoration

$$N\left(\frac{r}{\beta}\right) < \sum_{z\in B\left(a,\frac{r}{\beta}\right)} v_z(f)\log\left(\frac{r}{|z|}\right)$$

$$\leqslant \sum_{z\in B(a,r)} v_z(f)\log\left(\frac{r}{|z|}\right) \leqslant \mathbf{E}_{C(a,r)}(\log|f|) - \log(|\alpha_{v_a(f)}|) - v_a(f)\log(r).$$

On conclut avec la majoration $\mathbf{E}_{C(a,r)}(\log|f|) \leqslant \log||f||_{C(a,r)}$. □

Définition VIII.5. — Soit f une fonction entière qui n'est pas la fonction constante nulle. Alors *l'ordre de f* est défini comme

$$\mathrm{ordre}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log(\log(||f||_{C(0,r)}))}{\log(r)} \in [0,+\infty].$$

Proposition VIII.6. — *Soit $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}) - \{0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{ordre}(f) \leqslant \beta$;

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \|f\|_{\overline{B}(0,r)} = \mathcal{O}(e^{r^{\beta+\varepsilon}})$

Exemple VIII.7. — La fonction $\exp\circ\exp$ est d'ordre $+\infty$.

Théorème VIII.8. — *Si f est une fonction entière d'ordre $\leqslant \beta$, alors la série $\sum_{z\in\mathbf{C}^*} \frac{v_z(f)}{|z|^t}$ converge pour $t \in]\beta, +\infty[$.*

Démonstration. — Soit $t \in]\beta, +\infty[$. La série considérée est une série à termes positifs. Posons $\varepsilon = \frac{t-\beta}{2}$. Alors

$$\sum_{z\in\mathbf{C}^*} \frac{v_z(f)}{|z|^t} \leqslant \sum_{|z|\leqslant 1} \frac{v_z(f)}{|z|^t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (N(e^k) - N(e^{k-1}))\frac{1}{e^{t(k-1)}}$$

Le corollaire VIII.4 appliqué avec $r = e^k$ et $\beta = e$, fournit la majoration

$$N(e^k) - N(e^{k-1}) \leqslant \log\left(\frac{e^{e^{(k+1)(\beta+\varepsilon)}}}{Ce^{v_0(f)(k+1)}}\right) = \mathcal{O}(e^{(k+1)(t-\varepsilon)})$$

où C désigne une constante réelle. Donc $(N(e^k) - N(e^{k-1}))\frac{1}{e^{t(k-1)}} = \mathcal{O}(e^{-k\varepsilon})$ ce qui prouve que la série converge. □

VIII.2. Facteurs de Weierstraß

Définition VIII.9. — Pour tout entier n strictement positif,

$$W(u,n) = (1-u)e^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u^k}{k}}$$

Remarque VIII.10. — Notons que l'application $W(\cdot,n)$ est entière avec un zéro simple en $u = 1$. D'autre part $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u^k}{k}$ est le début du développement de $-\mathrm{Log}(1-u)$, ce qui explique que la valeur de $W(u,n)$ soit très proche de 1 pour les petites valeurs de u. Comme le but est de faire des produits infinis de tels facteurs, cette propriété sera cruciale par la suite.

Nous allons utiliser diverses majorations de ces facteurs

Proposition VIII.11. — *Soient n un entier strictement positif et $u \in \mathbf{C}$.*

a) *Si* $|u| \leqslant \frac{1}{2}$, *alors*

$$|W(u,n)| \leqslant e^{2|u|^n}$$
$$|W(u,n)|^{-1} \leqslant e^{2|u|^n}$$
$$|W(u,n)-1| \leqslant 4|u|^n;$$

b) *Si* $|u| \geqslant \frac{1}{2}$

$$|W(u,n)| \leqslant (1+|u|)e^{|2u|^{n-1}};$$

c) *Si* $|u| \geqslant 2$,

$$W(u,n)^{-1} \leqslant e^{2|u|^{n-1}}.$$

Notons qu'en particulier $W(u,n)$ est d'ordre $n-1$.

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Soit $u \in \mathbf{C}$ avec $|u| \leqslant \frac{1}{2}$. Dans ce cas $1-u \in \mathbf{C} -]-\infty, 0]$ et

$$(1-u) = e^{\mathrm{Log}(1-u)} = e^{-\sum_{k\geqslant 1}\frac{u^k}{k}}.$$

Donc

$$W(u,n) = e^{-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{u^k}{k}}$$

Or $|e^a| = e^{\Re a} \leqslant e^{|a|}$ et

$$|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{u^k}{k} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}|u^k| = \frac{|u|^n}{1-|u|} \leqslant 2|u|^n$$

Donc $W(u,n) \leqslant e^{2|u|^n}$. Comme $|e^{-a}| \leqslant e^{|a|}$, on obtient également $|W(u,n)|^{-1} \leqslant e^{2|u|^n}$.

D'autre part

$$|e^1 - 1| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|u|^k}{2^k} \leqslant 2|a|$$

si $|a| \leqslant 1$. Donc

$$|W(u,n)-1| \leqslant 2\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^k}{k}\right| \leqslant 4|u|^n.$$

Passons à l'assertion b). Soit $u \in \mathbf{C}$ tel que $|u| \geqslant \frac{1}{2}$. Par définition

$$|W(u,n)| \leqslant (1+|u|)e^{|u|+\cdots+\frac{|u|^{n-1}}{n-1}}$$

Mais on a également la majoration
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|u|^k}{k}\leqslant|2u|^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\leqslant|2u|^{n-1}.$$
Démontrons enfin l'assertion c). Soit $u\in\mathbf{C}$ avec $|u|\geqslant 2$, alors
$$|W(u,n)|^{-1}=\frac{1}{1-|u|}\left|e^{-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u^k}{k}}\right|\leqslant\frac{1}{|u|-1}e^{|u|^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}}\leqslant e^{2|u|^{n-1}}.$$
□

VIII.3. Décomposition des fonctions entières

Proposition VIII.12. — *Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Alors il existe une application entière f telle que*
$$\forall z\in\mathbf{C},\quad v_z(f)=\operatorname{Card}\{n\in\mathbf{N}\mid z_n=z\}.$$
Autrement dit, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où $z_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. Dans ce cas, prouvons que le produit infini
$$\prod_{j=0}^{+\infty}W\left(\frac{z}{z_j},j\right)\tag{14}$$
définit une application entière qui convient. Soit K une partie compacte de $\mathbf{C}$. Démontrons que la série
$$\sum_{n\in\mathbf{N}}\left|W\left(\frac{z}{z_n},n\right)-1\right|\tag{15}$$
converge uniformément sur K. Comme la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que $\left|\frac{z}{z_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ pour tout entier $n\geqslant N$ et tout $z\in K$. Par l'assertion a) de la proposition VIII.11 on obtient
$$\left|1-W\left(\frac{z}{z_n},n\right)\right|\leqslant 4\left|\frac{z}{z_n}\right|^n\leqslant 4\frac{1}{2^n}$$
ce qui prouve la convergence uniforme de la série (15) sur K. Par le théorème VII.7, le produit (14) définit donc une application entière. Comme
$$v_z\left(\prod_{n=0}^{+\infty}W\left(\frac{z}{z_n},n\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_z\left(W\left(\frac{z}{z_n},n\right)\right)=\operatorname{Card}\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{z}{z_n}=1\right\}$$

Le produit convient. □

Remarque VIII.13. — Remarquons que le fait d'utiliser $W(\cdot, n)$ pour le n-ème terme de la suite assure la convergence du produit mais fais tendre l'ordre des produits partiels vers l'infini. Autrement dit l'application obtenue croît très rapidement, un peu comme $\exp\circ\exp$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, ce qui n'est pas optimal. La proposition suivante permet d'obtenir un meilleur résultat de ce point de vue.

Proposition VIII.14. — *Sous les hypothèse de la proposition VIII.12, soit $\beta \in]1, +\infty[$. On suppose que la série $\sum_{\substack{j\in\mathbf{N}\\ z_j\neq 0}} \frac{1}{|z_j|^\beta}$ converge. Alors il existe une application entière d'ordre $\leqslant \beta$ qui vérifie la conclusion de la proposition VIII.12.*

Démonstration. — À nouveau, il suffit de traiter le cas où $z_j \neq 0$ pour $j \in \mathbf{N}$. Soit $n = \lceil\beta\rceil$, c'est-à-dire le plus petit entier qui majore β. Nous allons démontrer que le produit

$$f = \prod_{k=0}^{+\infty} W\left(\frac{z}{z_k}, n\right) \tag{16}$$

converge dans $\mathscr{H}(\mathbf{C})$ et définit une application d'ordre $\leqslant \beta$. Par l'assertion a) de la proposition VIII.11 on obtient

$$\left|1 - W\left(\frac{z}{z_k}, n\right)\right| \leqslant 4\left|\frac{z}{z_k}\right|^n$$

et cette série converge.

Majorons maintenant l'ordre du produit. Rappelons que $\beta \in]n-1, n]$. Les majorations de la proposition VIII.11 donnent la majoration

$$|f(z)| \leqslant \prod_{\substack{k\in\mathbf{N}\\ |z_k|\leqslant 2|z|}} \left(1 + \left|\frac{z}{z_k}\right|\right) e^{\left|2\frac{z}{z_k}\right|^{n-1}} \prod_{\substack{k\in\mathbf{N}\\ |z_k|\geqslant 2|z|}} e^{2\left|\frac{z}{z_k}\right|^n}$$

Choisissons une constante $C \geqslant 1$ telle que

$$\log(1+a) + (2a)^{n-1} \leqslant Ca^\beta$$

pour tout $a \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. On obtient alors

$$|f(z)| \leqslant e^{C|z|^\beta \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^\beta}}$$

Donc $\log(|f(z)|) = \mathscr{O}(|z|^\beta)$. □

Remarque VIII.15. — En fait, $\log(|f(z)|) = o(|z|^\beta)$. En effet fixons $\varepsilon > 0$ et prenons N tel que $\sum_{k=N+1}^{+} \infty \frac{1}{|z_k|^\beta} < \varepsilon$, alors

$$\log(|f(z)|) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \left(\log\left(1 + \frac{|z|}{|z_k|}\right) + \left|2\frac{z}{z_k}\right|^{n-1} \right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2\left|\frac{z}{z_k}\right|^n$$

La première somme qui est finie est un $o(|z|^\beta)$ et la seconde somme est majorée par $2\varepsilon|z|^\beta$.

Les résultats précédents nous permettent d'écrire toute fonctions entière comme un produit :

Théorème VIII.16. — *Soit $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$. Soit $n_0 = v_0(f)$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre complexes non nuls telle que*

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \quad v_z(f) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbf{N} \mid z_n = z\}.$$

Alors il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que la somme $\sum_{k\in\mathbf{N}} \left|W\left(\frac{z}{z_k}, n_k\right) - 1\right|$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ et une application entière $g \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$ de sorte que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = e^{g(z)} z^{n_0} \prod_{k\in\mathbf{N}} W\left(\frac{z}{z_k}, n_k\right).$$

Si l'application f vérifie en outre les deux conditions suivantes

(i) $\log(\|f\|_{C(0,r)}) = o(r^n)$;

(ii) *La série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{|z_j|^n}$ converge, alors on peut prendre $n_k = n$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et g est une application polynomiale de degré $< n$.*

Remarque VIII.17. — Si l'application f est d'ordre $< n$, alors elle vérifie les conditions (i) et (ii).

VIII.4. Le théorème de MITTAG-LEFFLER

IX. Théorème de la représentation conforme de RIEMANN

IX.1. L'espace topologique $\mathscr{H}(U)$. — Notre objectif est de munir l'espace $\mathscr{H}(U)$ d'une distance de sorte qu'une suite de fonctions holomorphes $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour cette distance si et seulement elle converge uniformément sur tout compact K de U.

Remarque IX.1. — Notons $\mathscr{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. Remarquons que l'application

$$\iota : \mathscr{H}(U) \longrightarrow \prod_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compact}}} \mathscr{C}(K,\mathbf{C})$$

qui envoie une application f sur la famille des restrictions $(f_{|K})$ est injective et que $\|\cdot\|_K$ défini une norme sur chaque espace vectoriel $\mathscr{C}(K,\mathbf{C})$. On peut donc munir le produit de la structure d'espace topologique produit. La topologie recherchée sur $\mathscr{H}(U)$ peut alors être définie comme celle pour laquelle une partie W de $\mathscr{H}(U)$ est ouverte si et seulement si $\iota(W)$ l'est. Mais il est plus pratique de définir une distance sur $\mathscr{H}(U)$ qui va donner la topologie souhaitée.

Lemme IX.2. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, posons*

$$K_n = \overline{B}(0,n)\cap\{x\in\mathbf{C} \mid d(x,\mathbf{C}-U) \geqslant \frac{1}{n+1}\},$$

alors

a) *Pour tout $n\in\mathbf{N}$, la partie K_n est un compact de U et $K_n\subset K_{n+1}$;*
b) *$U = \cup_{n\in\mathbf{N}} K_n$;*
c) *Pour tout compact K de U, il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $K\subset K_n$.*

Démonstration. — L'assertion a) résulte du fait que K_n est une partie fermée et bornée de $\mathbf{C}$.

Démontrons l'assertion c). Par le corollaire A2.3, la distance $d(K,\mathbf{C}-U)$ est strictement positive et K est borné. Il existe donc un entier $n\in\mathbf{N}$ tel que $K\subset\overline{B}(0,n)$ et $\frac{1}{n+1}\leqslant d(K,\mathbf{C}-U)$. Donc $K\subset K_n$.

L'assertion b) résulte de l'assertion c) appliquée au compact $\{z\}$ pour $z\in U$. □

Notation IX.3. — Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. On définit $d : \mathscr{H}(U)^2 \to \mathbf{R}_+$ par la formule

$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\min(||g-f||_{K_n}, 1)}{2^n}$$

pour tous $f, g \in \mathscr{H}(U)$.

Remarque IX.4. — Notons que $||g-f||_{K_n} = 0$ si $K_n = \emptyset$.

Proposition IX.5. — *L'application d est une distance sur $\mathscr{H}(U)$ qui munit $\mathscr{H}(U)$ d'une topologie telle qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'eléments de $\mathscr{H}(U)$ converge vers $f \in \mathscr{H}(U)$ si et seulement si la sioye $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de U.*

Démonstration. — Prouvons tout d'abord que l'application d est une distance.

La symétrie, c'est-à-dire la relation $d(f,g) = d(g,f)$ résulte de l'égalité $||f-g||_{K_n} = ||g-f||_{K_n}$ pour $f, g \in \mathscr{H}(U)$.

Soient $f, g \in \mathscr{H}(U)$ alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \min(1, ||g-f||_{K_n}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad ||g-f||_{K_n} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad g_{|K_n} = f_{|K_n} \\ &\Longleftrightarrow \quad f = g, \end{aligned}$$

où la dernière équivalence résult du fait que $U = \cup_{n\in\mathbf{N}} K_n$.

Démontrons maintenant l'inégalité triangulaire. Notons que pour $a, b \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\min(1, a+b) \leqslant \min(1,a) + \min(1,b).$$

En effet si $1 \leqslant a$ et $1 \leqslant b$, alors l'inégalité s'écrit $1 \leqslant 2$; si $a \leqslant 1 \leqslant b$ elle découle de l'inégalité $1 \leqslant a+1$ et si $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$, de l'inégalité $min(1, a+b) \leqslant a+b$.

Soient $f, g, h \in \mathscr{H}(U)$. On obtient les majorations

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\min(||h-g+g-f||_{K_n}, 1)}{2^n} \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\min(||h-g||_{K_n} + ||g-f||_{K_n}, 1)}{2^n} \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\min(||h-g||_{K_n}, 1) + \min(||g-f||_{K_n}, 1)}{2^n} \end{aligned}$$

$$\leqslant d(f,g)+d(g,h).$$

Il reste à prouver que cette distance vérifie la condition souhaitée. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}(U)$ qui converge vers $f\in\mathscr{H}(U)$ pour la distance d. Autrement dit $d(f_n,f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Soit K un compact de U. Par l'assertion c) du lemme , il existe un entier $N\in\mathbf{N}$ tel que $K\subset K_N$. Or $\min(\|f-f_n\|_{K_N},1)\leqslant 2^N d(f_n,f)$ donc la valeur de $\min(\|f-f_n\|_{K_N},1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En particulier elle est strictement inférieure à 1 pour n assez grand et donc égale à $\|f-f_n\|_{K_N}$. Donc $\|f-f_n\|_{K_N}$ et, a fortiori, $\|f-f_n\|_K$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Réciproquement soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui tend uniformément vers $f\in\mathscr{H}(U)$ sur toute partie compacte de U. Alors pour tout $k\in\mathbf{N}$, la suite $(\|f_n-f\|_{K_k})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. mais

$$d(f_n,f)\leqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{\min(1,\|f_n-f\|_{K_k})}{2^k}+\frac{1}{2^N}$$

pour tous $n,N\in\mathbf{N}$. Il en résulte que $d(f_n,f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. □

Dans la suite $\mathscr{H}(U)$ est muni de la topologie définie par d.

Théorème IX.6. — *L'espace $\mathscr{H}(U)$ est complet et pour tout $k\in\mathbf{N}$, l'application $f\mapsto f^{(k)}$ est continue.*

Remarque IX.7. — Rappelons qu'un espace métrique est dit *complet* si les suites de Cauchy convergent.

Démonstration. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{H}(U)$. Cette suite vérifie donc la condition :

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*,\exists N\in\mathbf{N},\forall p,q\in\mathbf{N},\quad (p\geqslant N \text{ et } q\geqslant N)\Longrightarrow d(f_p,f_q)<\varepsilon.$$

Nous allons démontrer que cette suite converge. Par d´finition de la distance, pour tout partie compacte K de U la suite $(f_{n|K})_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}(K,\mathbf{C})$ qui est un espace vectoriel normé complet. Elle converge donc uniformément vers une application f_K. En particulier la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une application f dont la restriction à K coïncide avec f_K pour toute partie compacte K de U. Comme cette la convergence est uniforme sur tout partie compacte de U, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans $\mathscr{H}(U)$.

Démontrons la continuite de l'application $f \mapsto f^{(k)}$. Soient $f, g \in \mathscr{H}(U)$, soit $a \in U$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$. Alors pour tout $b \in B(a,r)$, on a la formule

$$f^{(k)}(b) = k! \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$$

Donc si $r' \in]0, r[$.

$$\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\overline{B}(0,r')} \leqslant k! \frac{k}{!} \frac{\|f-g\|_{C(a,r)}}{(r-r')^{k+1}} r$$

On peut alors recouvrir n'importe quel compact K par un nombre fini de telles boules. □

IX.2. Théorème de MONTEL. — Nous allons démontrer le résultat suivant, conséquence du thérome d'Ascoli (théorème A2.12).

***Théorème IX.8* (Montel). —** *Soit A une partie de $\mathscr{H}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'adhérence $\overline{A}$ est compacte ;*

(ii) *Pour toute partie compacte K de U, l'ensemble des restrictions $A_{|K} = \{f_{|K}, f \in A\}$ est borné pour $\|\cdot\|_K$.*

Démonstration. — Comme l'application de $\mathscr{H}(U) \to \mathbf{R}$ donnée par $f \mapsto \|f\|_K$ est continue, la condition (i) implique la condition (ii).

Pour la réciproque, démontrons tout d'abord que pour tout partie compact K de U, l'ensemble $\overline{A}_| K$ des restrictions de $\overline{A}$ est équicontinu. Soit $a \in U$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(a, 2r) \subset U$. Cette partie est bornée. Comme

$$\|f'\|_{B(a,r)} \leqslant \frac{1}{r} \|f\|_{C(a,2r)} \leqslant C_{a,r}$$

pour un nombre $C_{a,r} \in \mathbf{R}$ indépendant de $f \in \overline{A}$, l'inégalité des accroissements finis (théorème I.15),

$$\forall f \in \overline{A}, \forall y, z \in B(a,r), \quad |f(y) - f(z)| \leqslant C_{a,r} |y-z|$$

Comme le compact K peut être recouvert par un nombre fini de telles boules, on obtient que $\overline{A}_{|K}$ est équicontinu et bornée. Par le théorème d'ASCOLI (théorème A2.12), on en déduit que $\overline{A}_{|K}$ est compact dans $\mathscr{C}(K, \mathbf{C})$.

Notons $\mathscr{K}(U)$ l'ensemble des parties compactes de U. Donc en appliquant le théorème de TYKHONOV, qui assure qu'un produit d'espaces topologiques compacts est compact, $\prod_{K \in \mathscr{K}(U)} \overline{A}_{|K}$ est compact.

Reprenons l'application ι de la remarque IX.1. Alors $\iota(\overline{A})$ est fermé dans l'espace $\prod_{K\in\mathscr{K}(U)}\mathscr{C}(K,\mathbf{C})$. En effet, il existe un fermé F de cet espace tel que $\overline{A} = \overline{\iota}^{1}(F)$ et $\iota(\overline{A})$ est l'intersection de F avec les fermés définis par

$$\left\{(f_K)_{K\in\mathscr{K}(U)} \in \prod_{K\in\mathscr{K}(U)} \mathscr{C}(K,\mathbf{C}) \mid (f_{K_0})_{|K_0\cap K_1} = (f_{K_1})_{|K_0\cap K_1}\right\}$$

Donc $\iota(\overline{A})$ est une partie fermée du compact $\prod_{K\in\mathscr{K}(U)}\overline{A}_{|K}$ et donc il est compact. Or les ouverts de $\mathscr{H}(U)$ sont l'image réciproque d'ouverts par ι. Donc $\overline{A}$ est compact. □

IX.3. Théorème de la représentation conforme de RIEMANN

Théorème IX.9 **(RIEMANN).** — *Soit U un ouvert connexe et* simplement connexe *de* $\mathbf{C}$, *différent de* $\mathbf{C}$. *Alors pour tout $a \in U$ et tout $\alpha \in \mathbf{U}$, il existe une unique application biholomorphe $\mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{U}$ telle que $f(0) = a$ et $f'(0) \in \mathbf{R}_+^*\alpha$.*

Remarque IX.10. — Le théorème est valide mais sans intérêt si U est vide. Sa conclusion est fausse si $U = \mathbf{C}$. En effet s'il existait une application biholomorphe $f : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ alors f^{-1} serait une application entière bornée et non constante, ce qui contredit le théorème de LIOUVILLE (théorème IV.2).

Preuve du théorème. — Démontrons tout d'abord l'*unicité*. Si les applications f_1 et f_2 conviennent, alors $f_2^{-1}\circ f_1$ est un automorphisme bianalytique du disque unité $\mathbf{D}$ et par l'unicité dans le théorème IV.10, $f_2^{-1}\circ f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ ce qui donne $f_1 = f_2$.

Comme $U \neq \mathbf{C}$, on choisit $a \in \mathbf{C} - U$. L'application $f : z \mapsto z - a$ est holomorphe sur U qui est simplement connexe et ne s'annule pas. Par le corollaire VI.20, il existe une application holomorphe $g \in \mathscr{H}(U)$ telle que $f = g^2$. L'application g ne s'annule pas et comme f est injective, et que f est la composée de g et de l'application $\square : z \mapsto z^2$, l'application g est injective. Donc g est un isomorphime bianalytique de U sur $U_1 = g(U)$. Supposons qu'il existe $z \in U_1$ tel que $-z \in U_1$. Alors il existe x et $y \in U$ tels que $g(x) = z = -g(y)$. Mais alors $f(x) = g(x)^2 = g(y)^2 = f(y)$. Donc $x = y$ et $z = -z$. Par conséquent $z = 0$ ce qui contredit le fait que l'application g ne s'annule pas. Soit $w_0 \in U_1$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(w_0,r) \subset U_1$ Alors $B(-w_0,r) \subset -U_1 \subset \mathbf{C} - U_1$. L'application $S : \mathbf{C} - \overline{B}(-w_0,r) \to \mathbf{D} - \{0\}$ donnée par $z \mapsto \frac{r}{z+w_0}$ et un isomorphisme bianalytique de réciproque $z \mapsto \frac{r}{z} - w_0$. En composant avec un automorphisme de $\mathbf{D}$, on obtient alors un isomorphisme bianalytique φ de U sur $U_3 \subset \mathbf{D}$ tel que $\varphi(a) = 0$.

Notons

$$A = \{f \in \mathscr{H}(U_2) \mid f(U_3) \subset \mathbf{D},\ f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est injective}\} \cup \{0\}.$$

Alors l'injection naturelle $U_3 \to \mathbf{D}$ est un élément de $\mathcal{A}$. Par définition pour toute partie compacte K de U_3, $\mathcal{A}_{|K}$ est bornée. Par le théorème de Montel (théorème IX.8), $\overline{\mathcal{A}}$ est compact. Prouvons que $\mathcal{A}$ est fermé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers f dans $\mathscr{H}(U)$. Par le théorème de Hurwitz (théorème VII.4), l'application f est injective ou constante. Comme $f(0)=0$, si elle est constante, elle est nulle. Si $z \in \mathbf{D}$, alors $|f_n(z)| \leqslant 1$ donc $f(\mathbf{D}) \subset \overline{\mathbf{D}}$. Mais si f n'est pas nulle elle est injective, auquel cas $f(\mathbf{D})$ est une partie ouverte donc $f(\mathbf{D})$ est contenu dans l'intérieur de $\overline{\mathbf{D}}$, c'est-à-dire dans $\mathbf{D}$. Donc $f \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est compact. Par le théorème IX.6, l'application $f \mapsto |f'(0)|$ est continue, elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$. Soit $f \in \mathcal{A}$ telle que $|f'(0)|$ est maximal. Prouvons que $f(U_3)=\mathbf{D}$. Dans le cas contraire, soit $b \in \mathbf{D} - f(U_3)$ et considérons, pour $d \in \mathbf{D}$, l'homographie $S_d : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ donnée par $z \mapsto \frac{d-z}{1-\overline{d}z}$. Par le théorème IV.10, c'est un automorphisme de $\mathbf{D}$. Comme $S_b \circ f : U_3 \to \mathbf{D}$ ne s'annule pas et que U_3 est simplement connexe puisqu'il homéomorphe à U, il existe une application h telle que $S_b \circ f = g^2$. Comme $S_b \circ f$ est injective, il en est de même de g et $g(U_3) \subset \mathbf{D}$. soit $c = g(0)$ et $F = S_c \circ g$. Alors $F \in \mathcal{A}$ et vérifie la relation

$$f = (S_b^{-1} \circ \square \circ S_c^{-1}) \circ F.$$

L'application $\varphi = S_b^{-1} \circ \square \circ S_c^{-1} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ envoie 0 sur 0 mais n'est pas une rotation. Par le lemme de Schwarz (proposition ??), il en résulte que $\varphi'(0) < 1$ Donc

$$|f'(0)| = |\varphi'(0)| \times |F'(0)| < |F'(0)|$$

ce qui contredit la maximalité de $|f'(0)|$. □

Remarque IX.11. — On pourra reprocher à cette preuve son manque d'effectivité : elle ne donne pas de méthode pour trouver f.

X. La fonction zêta de RIEMANN

X.1. Définition

Définition X.1. — La fonction zêta de RIEMANN est, sur l'ouvert $\{s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > 1\}$, la somme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n^s}$

Remarques X.2. — i) Comme $\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$ si $\Re(s) > a$, la série converge uniformément sur tout compact de l'ouvert considéré.

ii) Cette fonction est très utilisée en théorie analytique des nombres, en particulier parce qu'on peut l'écrire comme un produit sur l'ensemble des nombres premiers. L'objectif de ce chapitre est de prouver que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ et de démontrer que ce prolongement vérifie une équation fonctionnelle.

X.2. Produit eulérien

Notation X.3. — On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Proposition X.4. — *Le produit $\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ converge uniformément sur tout compact de $\{s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > 1\}$ et sur cet ouvert*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Démonstration. — Comme $|1-(1-p^{-s})| = |p^{-s}| \leqslant p^{-a}$ si $\Re(s) > a$, le théorème VII.7 montre que l'inverse du produit converge uniformément sur tout compact de $\{s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > 1\}$ et la continuité de l'application $z \mapsto 1/z$ assure qu'il en est de même de $\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$.

Soient $p_1, \ldots, p_l$ des nombres premiers deux à deux distincts. alors

$$\frac{1}{1-p_j^{-s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_i^{-ks}.$$

Donc on peut écrire

$$\prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1-p_j^{-s}} = \sum_{n \in \left\{\prod_{i=1}^{l} p_i^{k_i}, (k_1, \dots k_l) \in \mathbf{N}^l\right\}} n^{-s}$$

donc

$$\zeta(s) - \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1-p_j^{-s}} = \sum_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ \exists p \in \mathscr{P} - \{p_1, \dots, p_l\},\ p | n}} n^{-s}$$

$\square$

X.3. Polynômes de BERNOULLI

Définition X.5. — Les *nombres de* BERNOULLI sont définis par

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{B_n}{n!} T^n = \mathrm{DT}_0\left(z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}\right).$$

Les *polynômes de* BERNOULLI sont définis par

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{B_n(x)}{n!} T^n = \mathrm{DT}_0\left(z \mapsto \frac{z e^{zx}}{e^z - 1}\right).$$

Remarque X.6. — Un calcul donne $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_2 = \frac{1}{6}$.

Proposition X.7. — *Les polynômes de* BERNOULLI *sont donnés par la formule*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k B_{n-k}.$$

Démonstration. — Cela résulte du calcul du produit des développement de TAYLOR en 0 :

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{B_n}{n!} T^n\right) \times \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!} T^n\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}\right) T^n. \qquad \square$$

Proposition X.8. — *Le valeurs en* 0 *et* 1 *des polynômes de* BERNOULLI *sont donnée par*

$$B_1(0) = -\frac{1}{2} \qquad B_1(1) = \frac{1}{2}$$

et

$$B_n(0) = B_n \qquad B_n(1) = B_n$$

si $n \neq 1$.

Démonstration. — Cela résulte des égalités
$$\sum_{n\in\mathbf{N}}(B_n(1)-B_n(0))\frac{T^n}{n!}=\frac{T(e^T-1)}{e^T-1}=T$$
et de la valeur de $B_1(0)$. □

Proposition X.9. — *Pour tout entier $n\geqslant 1$ on a la relation*
$$B_n'=nB_{n-1}$$

Démonstration. — Il suffit de dériver la relation définissant les polynômes de Bernoulli :
$$\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{B_n'(x)}{n!}T^n=\frac{T^2e^{Tx}}{e^T-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{B_{n-1}(x)}{n!}T^n.$$
□

Proposition X.10. — *On a la relation*
$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m=\frac{B_{m+1}(n)-B_{m+1}(0)}{m+1}$$

Démonstration. — La définition des nombres de Bernoulli donne l'égalité
$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty}(B_m(m)-B_m(0))\frac{T^m}{m!}&=\frac{T(e^{mT}-1)}{e^T-1}\\&=T(1+e^T+\cdots+e^{(m-1)T})\\&=\sum_{m\geqslant 1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\right)T^m\\&=\sum_{m\geqslant 1}\left(m\sum_{k=0}^{m-1}k^{m-1}\right)\frac{T^m}{m!}\end{aligned}$$
□

App. 1 Topologie générale

Cours

Dans cet appendice, nous reprenons diverses notions de topologie générale qui nous sont utiles dans le cours. Toutefois cet appendice ne constitue pas un cours complet de topologie. L'idée centrale de la topologie générale est d'exprimer toutes les notions classiques de topologie (continuité, connexité, compacité,...) à partir des ouverts.

A1.1. Espace topologique

Définition A1.1. — Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathscr{U}_X$ de parties de X appelées *ouverts de* X vérifiant les conditions suivantes :

(O1) $X \in \mathscr{U}_X$;

(O2) $\forall U, V \in \mathscr{U}_X, \quad U \cap V \in \mathscr{U}_X$;

(O3) Pour tout famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X, la réunion $\bigcup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathscr{U}_X$.

Un *fermé* de X est le complémentaire d'une partie ouverte de X.

Remarques A1.2. — i) Si $I = \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$. La condition **(O3)** implique donc que $\emptyset \in \mathscr{U}_X$.

ii) Par récurrence, il découle de la condition **(O2)** qu'une intersection d'une famille *finie* d'ouverts est ouverte.

iii) On peut également définir la topologie de X en se donnant l'ensemble $\mathscr{F}_X$ des fermés de X qui doit vérifier les conditions suivantes :

(F1) $\emptyset \in \mathscr{F}_X$;

(F2) La réunion de deux fermés de X est un fermé de X.

(F3) L'intersection d'une famille de parties fermées de X est un fermé de X, avec la convention que si $(F_i)_{i\in\emptyset}$ est la famille de parties de X indicée par l'ensemble vide, alors $\bigcap_{i\in\emptyset} F_i = X$.

Exemples A1.3. — i) Un ensemble X muni de l'ensemble de ses parties est un espace topologique dont toutes les parties sont ouvertes et fermées. Cette topologie est appelée la *topologie discrète*.

ii) Un exemple X munit de $\{\emptyset, X\}$ est un espace topologique. Cette topologie est appelée la *topologie grossière*.

iii) Si Y est une partie d'un espace topologique X dont l'ensemble des ouverts est $\mathscr{U}_X$, alors

$$\{U \cap Y,\ U \in \mathscr{U}_X\}$$

définit une topologie sur Y appelée *topologie induite*. Sauf mention explicite du contraire, lorsqu'on considère une partie d'un espace topologique comme un espace topologique, il est muni de la topologie induite.

Notons que si U est un ouvert de X, alors les ouverts de U pour la topologie induite sont les ouverts de X contenus dans U.

Le premier exemple amène à poser la définition suivante :

Définition A1.4. — Un espace topologique X est dit *discret* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Toute partie de X est ouverte ;

(ii) Toute partie de X est fermée ;

(iii) Pour tout $a \in X$, le singleton a est ouvert.

Démonstration. — Les assertions (i) et (ii) sont équivalentes par définition des fermés. Si la condition (i) est vérifiée, la condition (iii) est vraie. Enfin pour toute partie Y de X, on a l'égalité

$$Y = \bigcup_{a \in Y} \{a\}.$$

Donc si les singletons sont ouverts, toute partie est ouverte. □

A1.2. Intérieur et Adhérence

Définition A1.5. — Soit X un espace topologique et soit Y une partie de X.

L'intérieur de Y est la réunion $\mathring{Y}$ des parties ouvertes de X contenues dans Y.

L'adhérence de Y est l'intersection $\overline{Y}$ des fermés de X qui contiennent Y.

On dit qu'un point $x \in X$ est *adhérent* à Y s'il appartient à son adhérence.

Remarque A1.6. — L'intérieur d'une partie Y est un ouvert ; c'est le plus grand ouvert contenu dans Y.

De méme, l'adhérence d'une partie Y est un fermé ; c'est le plus petit fermé contenant Y.

Notons que, par définition, pour toute partie Y d'un espace topologique X, on a les formules

$$\overline{X - Y} = X - \mathring{Y} \qquad (X - Y)^\circ = X - \overline{Y}.$$

Définition A1.7. — Soit Y une partie d'un espace topologique X. Un *point d'accumulation* de Y est un point $x \in X$ qui est adhérent à $Y - \{x\}$.

A1.3. Continuité

Définition A1.8. — Soit X et Y des espaces topologiques une *application continue de X dans Y* est une application $f : X \to Y$ telle que $\overset{-1}{f}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y.

Remarque A1.9. — La composée de deux applications continues est continue.

La réciproque d'une application continue et bijective n'est pas toujours continue. Comme exemple, il suffit de considérer l'application $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète dans $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle.

Définition A1.10. — Soient X et Y des espaces topologiques. Un *homéomorphisme* de X sur Y est une application $f : X \to Y$ continue, bijective et dont la réciproque est également continue.

A1.4. Connexité

Définition A1.11. — Un espace topologique X est dit *connexe* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) $\emptyset$ et X sont les seules parties ouvertes et fermées de X ;

(ii) Toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète est constante.

Exemple A1.12. — Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$.

Proposition et définition A1.13. — *Soit X un espace topologique et soit $a \in X$. La réunion des parties connexes de X qui contiennent a est connexe et s'appelle la* composante connexe de a*. C'est une partie fermée de X.*

Si on suppose que X est localement connexe*, c'est-à-dire que tout point de X admet un voisinage connexe, la composante connexe d'un point de X est également ouverte.*

Lemme A1.14. — *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X telles que*

$$\forall i,j \in I, \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset,$$

alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. — On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète. Soit $f : \bigcap_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ une application continue. Pour tout $i \in I$, la partie A_i est connexe, donc la restriction $f_{|A_i}$ est constante. Soit c_i la valeur de $f_{|A_i}$. Si $i,j \in I$, choisissons $a_{i,j} \in A_i \cap A_j \neq \emptyset$, on obtient $c_i = f(a_{i,j}) = c_j$, donc l'application f est constante. □

Lemme A1.15. — *L'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

Démonstration. — Soit C une partie connexe. Soit $f : \overline{C} \to \{0,1\}$ une application continue $f_{|C}$ est constante, soit c sa valeur. Comme $\{c\}$ est fermé, il en est de même de $\overset{-1}{f}(\{c\})$. Or $C \subset f^{-1}(\{c\})$, donc $\overline{C} \subset \overset{-1}{f}(\{c\})$. Autrement dit, f est constante. Donc $\overline{C}$ est connexe. □

Preuve de la proposition. — Le lemme A1.14 donne la première assertion. Le lemme A1.15 donne la seconde.

Supposons maintenant que X est localement connexe. Notons C_a la composante connexe de a et soit $x \in C_a$. Par hypothèse, il existe un voisinage V de x qui est connexe. comme $x \in C_a \cap V$, cette réunion est connexe et contient a. Par définition de la composante connexe, $C_a \cap V \subset C_a$. A fortiori, $V \subset C_a$ et donc C_a est un voisinage de x. Cela prouve que C_a est ouvert. □

A1.5. Chemins

A1.5.1. *Définition*

Définition A1.16. — Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. Le point $\gamma(0)$ s'appelle l'*origine du chemin*, on le note $o(\gamma)$ et $\gamma(1)$ son *terme*, noté $t(\gamma)$.

On dit qu'un chemin γ est un *lacet* si $t(\gamma) = o(\gamma)$.

Remarque A1.17. — Il nous arrivera de d'appeler chemin de x à y un chemin d'origine x et de terme y.

Exemple A1.18. — Si $x \in X$, l'application $t \mapsto x$ définit un chemin dans X, appelé chemin constant en x et notè e_x.

A1.5.2. *Opérations sur les chemins*

Définition A1.19. — Soit X un espace topologique

a) Soient γ_1 et γ_2 des chemins dans X. On dit que les chemins γ_1 et γ_2 sont *juxtaposables* si $o(\gamma_2) = t(\gamma_1)$, c'est-à-dire $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$;

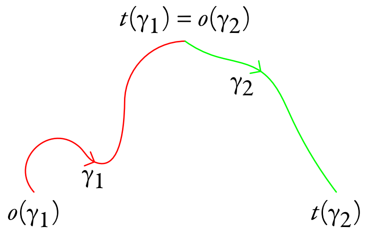

FIGURE 14. Juxtaposition des chemins

b) Si γ_1 et γ_2 sont des chemins juxtaposables, la *juxtaposition* de γ_1 et de γ_2 est le chemin $\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \to X$ donné par

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

c) Soit γ un chemin dans X, le chemin *inverse* est le chemin $\overline{\gamma} : [0,1] \to X$ donné par $t \mapsto \gamma(1-t)$.

Remarque A1.20. — Notons que $o(\overline{\gamma}) = t(\gamma)$ et $t(\overline{\gamma}) = o(\gamma)$. Donc les chemins γ et $\overline{\gamma}$ sont juxtaposables de même que les chemins $\overline{\gamma}$ et γ.

A1.6. Connexité par arcs

Proposition A1.21. — *Soit X un espace topologique. La relation $\mathscr{R}$ sur X définie par*

$$x\mathscr{R}y \iff \text{« il existe un chemin dans } X \text{ d'origine } x \text{ et de terme } y \text{ »}$$

est une relation d'équivalence sur X.

Démonstration. — **Réflexivité.** Pour tout $x \in X$ le chemin constant e_x est un chemin de x à x.

Symétrie. Soit γ un chemin dans X d'origine x et de terme y, alors $\overline{\gamma}$ est un chemin de y à x.

Transitivité Soient x, y et z des points de X. Supposons que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Alors soit γ_1 un chemin de x à y et γ_2 un chemin de y à z. Alors ces chemins sont juxtaposables et $\gamma_1 * \gamma_2$ est un chemin de x à z. □

Définition A1.22. — Les classes d'équivalences pour cette relation sont appelées les *composantes connexes par arcs de X*

On dit qu'un espace topologique est *connexe par arcs* si tous ses points sont dans la même composante connexe par arcs.

A1.7. Espaces métriques. — Les espaces métriques sont des ensembles munis d'une distance qui va permettre de définir une topologie.

***Définition A1.23.* —** Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ qui vérifie les conditions suivantes

(D1)
$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

(D2) (Symétrie)
$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x);$$

(D3) (Inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$;

Un espace métrique est un ensemble X muni d'une distance d_X.

Soient X un espace métrique, $a \in X$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. La boule ouverte centrée en a et de rayon r est la partie
$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$
On munit X d'une topologie en définissant un ouvert comme une réunion de boules ouvertes de X.

***Définition A1.24.* —** Soit X un espace métrique, de distance d. Soient Y et Z des parties non vides de X. La distance de Y à Z est définie comme le nombre réel
$$d(Y, Z) = \inf\{d(y, z),\ y \in Y,\ z \in Z\}$$
Si $x \in X$, on note également $d(x, Y)$ pour $d(\{x\}, Y)$.

***Lemme A1.25.* —** *Soient X un espace métrique de distance d, Y une partie non vide de X et soient $x_1, x_2 \in X$. Alors*
$$|d(x_1, Y) - d(x_2, Y)| \leqslant d(x_1, x_2)$$
En particulier l'application $x \mapsto d(x, Y)$ est continue.

Démonstration. — Soit $y \in Y$ la majoration
$$d(x_1, Y) \leqslant d(x_1, y) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$$
donne l'inégalité $d(x_2, y) \geqslant d(x_1, Y) - d(x_1, x_2)$. Comme cela vaut pour tout $y \in Y$, on obtient $d(x_2, Y) \geqslant d(x_1, Y) - d(x_1, x_2)$ ce qui fournit la majoration $d(x_1, Y) - d(x_2, Y) \leqslant d(x_1, x_2)$. En échangeant x_1 et x_2, on obtient également l'inégalité $d(x_2, Y) - d(x_1, Y) \leqslant d(x_1, x_2)$ ce qui fournit le résultat. □

App. 2 Compléments sur les espace vectoriels normés

A2.1. Topologie des espaces vectoriels normés

Rappel A2.1. — Soit E un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une norme $||\cdot||$, alors on peut munir E de la distance donnée par $(x,y) \mapsto ||y-x||$.

Pour $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$, la *boule ouverte de centre a et de rayon r* est notée

$$B_E(a,r) = \{x \in E \mid ||x-a|| < r\}.$$

Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, on notera $B(a,r)$ pour $B_E(a,r)$. La boule *fermée* de centre r et de rayon r est notée

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid ||x-a|| \leqslant r\}.$$

Un *ouvert* de E est une partie U de E vérifiant une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) La partie U est réunion d'une famille (éventuellement infinie ou vide) de boules ouvertes ;

(ii) $\forall x \in U, \exists r \in \mathbf{R}_+^*, \quad B(x,r) \subset U.$

A2.2. Parties compactes en dimension finie

On rappelle la description des parties compactes dans un espace vectoriel réel de dimension finie :

Théorème A2.2. — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La partie K est compacte ;*

(ii) *La partie K est fermée et bornée.*

Corollaire A2.3. — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit K une partie compacte de E et soit F une partie fermée de E. Alors il exisre $x \in K$ et $y \in F$ tels que*

$$d(K,F) = d(x,y).$$

Démonstration. — Par le lemme A1.25, l'application $x \mapsto d(x,F)$ est continue. Il existe donc un $x \in K$ tel que $d(x,F) = d(K,F)$. Notons $\delta = d(x,F)$. Alors $F \cap \overline{B}(x,\delta+1)$ est fermée et bornée. Elle est donc compacte. En outre comme $d(x,F) < \delta + 1$, on obtient l'égalité

$$d(K,F) = d(x,f) = d(x,\overline{B}(x,\delta+1) \cap F)$$

Par continuité de la distance, il existe $y \in B(x,\delta+1) \cap F$ tel que

$$d(x,y) = d(x,\overline{B}(x,\delta+1) \cap F) = d(K,F).$$

□

Corollaire A2.4. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $K \subset U$ une partie compacte alors $d(K, \mathbf{C} - U) >$ 0.*

Démonstration. — Comme U est ouvert, la partie $\mathbf{C} - U$ est fermée et, comme $K \subset$, l'intersection $K \cap (\mathbf{C} - U)$ est vide. Le résultat découle alors du corollaire A2.3. □

A2.3. Théorème du point fixe

Définition A2.5. — Soit E un espace vectoriel normé et soit F une partie de E. Soit $f : F \to F$ une application et soit $k \in]0,1[$. On dit que f est *k-contractante* si

$$\forall x, y \in F, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Remarque A2.6. — Une application k-contractante est continue.

Théorème A2.7. — *Soit F un fermé non vide d'un espace vectoriel normé* complet *et soit $k \in]0,1[$.*

a) *Soit $f : F \to F$ une application k-contractante alors il existe un unique $a \in F$ qui est un* point fixe *de f, c'est-à-dire tel que $f(a) = a$. En outre, cet élément s'obtient de la façon suivante : soit $\lambda \in F$, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$u_0 = \lambda \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a quand n tend vers $+\infty$.

b) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions k-contractantes de F vers F. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une application f. Soit a_n le point fixe de f_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors f est également k-contractante et la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le point fixe de f.*

Démonstration. — a)) Démontrons d'abord l'unicité si $f(a) = a$ et $f(b) = b$ alors

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leqslant k\|a - b\|$$

Comme $k < 1$ cela donne $\|a - b\| = 0$ et donc $a = b$.

Pour prouver l'existence, fixons $\lambda \in U$ et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de l'énoncé. Comme l'application f est k-contractante, on a les relations

$$||u_{n+2} - u_{n+1}|| = ||f(u_{n+1}) - f(u_n)|| \leqslant k||u_{n+1} - u_n||$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par récurrence, on en déduit que

$$||u_{n+1} - u_n|| \leqslant k^n ||u_1 - u_0||$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui prouve que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente. Donc la suite $(u_n - u_0)_{n\in\mathbf{N}}$, qui est la suite des sommes partielles de cette série est convergente. Notons a la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors a est aussi la limite de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Comme F est une partie fermée de E, la limite a appartient aussi à F et, comme f est continue, $a = f(a)$.

b)) Soient $x, y \in F$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a l'inégalité

$$||f_n(x) - f_n(y)|| \leqslant k||x - y||.$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, cela donne

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant k||x - y||$$

ce qui prouve que f est bien k-contractante. En outre les relations

$$||a - a_n|| = ||f(a) - f_n(a_n)|| \leqslant ||f(a) - f_n(a)|| + ||f_n(a) - f_n(a_n)|| \leqslant ||f(a) - f_n(a)|| + k||a - a_n||$$

nous donne la majoration explicite

$$||a - a_n|| \leqslant \frac{1}{1-k}||f(a) - f_n(a)||$$

ce qui prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a. □

A2.4. Parties localement finies

Proposition et définition A2.8. — *Soit U un ouvert d'un* **R***-espace vectoriel de dimension finie. Soit X une partie de U. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La partie X est discrète et fermée* dans U *;*

(ii) *La partie X n'admet pas de point d'accumulation* dans U *;*

(iii) *Pour toute partie compacte K de U, l'intersection $K \cap X$ est finie ;*

(iv) *Pour tout $a \in U$, il existe un voisinage W de a tel que $X \cap W$ est fini ;*

(v) $\forall a \in U, \exists r \in \mathbf{R}_+^*, \quad B(a, r) \cap X = \{a\} \cap X.$

On dit alors que X est une partie localement finie de U.

Il faut prendre garde au fait que la partie X n'est pas forcément fermée dans E. Par exemple on peut prendre $U = B(0, 1)$ dans $\mathbf{C}$ et $X = \left\{1 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbf{N}\right\}$. Cette partie est localement finie dans U, mais n'est pas fermée dans $\mathbf{C}$ (figure 15).

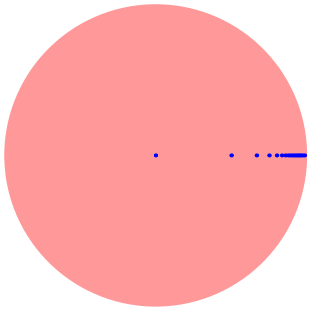

FIGURE 15. Ensemble localement fini dans la boule

Preuve de la proposition. — Démontrons tout d'abord l'implication $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$. Soit ℓ un point d'accumulation de X dans U. Si $\ell \notin X$, alors $\ell \in \overline{X} - X$ et X n'est pas fermé. Si $\ell \in X$, alors

$$\forall r \in \mathbf{R}_+^*, \quad B(l, r) \cap X - \{l\} \neq \emptyset$$

Donc $\{\ell\}$ n'est pas ouvert dans X, ce qui prouve que l'ensemble X n'est pas discret.

Démontrons l'implication $\neg(iii) \Rightarrow \neg(ii)$. Soit K une partie compacte de U telle que $K \cap X$ n'est pas finie. Il existe donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $K \cap X$. Comme K est compact, on peut en extraire une suite qui converge vers $\ell \in K \subset U$. Mais alors le point ℓ est un point d'accumulation de X dans U.

Démontrons maintenant l'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $a \in U$ et soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset U$. Comme l'espace E est de dimension finie, la boule fermée $\overline{B}(a, \frac{r}{2})$ est bornée et donc compacte. Par la condition (iii), l'intersection $X \cap \overline{B}(a, \frac{r}{2})$ est finie ce qui prouve que le voisinage $W = \overline{B}(a \frac{r}{2})$ convient.

Pour prouver l'implication $(iv) \Rightarrow (v)$, soit W un voisinage de a tel que $W \cap X$ est fini. Il existe alors $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r_0) \subset W$. L'ensemble $X \cap B(a, r_0)$ est également fini. Posons

$$r = \min(\{r_0\} \cup \{\|z - a\|, z \in B(a, r_0) \cap X - \{a\}\}).$$

Comme l'ensemble de droite est fini, le nombre r appartient à cet ensemble donc $r > 0$. Mais, par construction, $B(a, r) \cap X \subset \{a\}$.

Démontrons enfin $(v) \Rightarrow (i)$. Si $a \in U - X$, alors il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset U - X$. Cela prouve que $U - X$ est ouvert et donc X est fermé dans U. Si $a \in X$, alors il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \cap X = \{a\}$, ce qui prouve que $\{a\}$ est ouvert dans X. Donc l'ensemble X est discret. □

Exemples A2.9. — i) Un ensemble fini est localement fini.

ii) Plus généralement la réunion d'un nombre fini de parties localement finies d'un ouvert U est localement finie dans U.

A2.5. Théorème d'Ascoli

Définition A2.10. — Soit K un espace métrique compact et soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $||\cdot||_E$. Une partie $A \subset \mathscr{C}(K, E)$ est dite *équicontinue* si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbf{R}_+^*, \forall f \in A, \forall x, y \in K, \quad d_K(x, y) < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(y)||_E < \varepsilon.$$

Remarque A2.11. — Le point important dans cette définition est que le nombre réel δ ne dépend pas de $f \in A$.

***Théorème A2.12* (Ascoli).** — *On munit $\mathscr{C}(K, E)$ de la norme donnée par $||f||_K = \max_{x \in K} ||f(x)||_E$. Soit A une partie de $\mathscr{C}(K, E)$. Les conditions suivantes sont équivalents :*

(i) *La partie A est équicontinue et bornée ;*

(ii) *L'adhérence $\overline{A}$ est compacte.*

App. 3 Homotopie et groupe de Poincaré

A3.1. Homotopie entre applications continues. — Une homotopie peut être vue comme un chemin dans l'espace des applications continues d'un espace topologique X vers un espace topologique Y.

***Définition A3.1.* —** Soient V et X des espaces topologiques. Soit γ_0 et γ_1 des applications continues de V dans X. Une *homotopie d'origine* γ_0 *et de terme* γ_1 (ou plus simplement une *homotopie de* γ_0 *à* γ_1) est une application continue $H : V \times [0,1] \to X$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$H(v,k) = \gamma_k(v)$$

pour tout $k \in \{0,1\}$ et tout $v \in V$. S'il existe une homotopie de γ_0 à γ_1 on dit que les applications γ_0 et γ_1 sont *homotopes*

Dans le cas où γ_0 et γ_1 sont des chemins, c'est-à-dire dans le cas où $V = [0,1]$, ont dit qu'une homotopie H de γ_0 à γ_1 est *stricte* si, en outre, les applications $u \mapsto H(0,u)$ et $u \mapsto H(1,u)$ sont constantes. On dit alors que γ_0 et γ_1 sont *strictement homotopes*

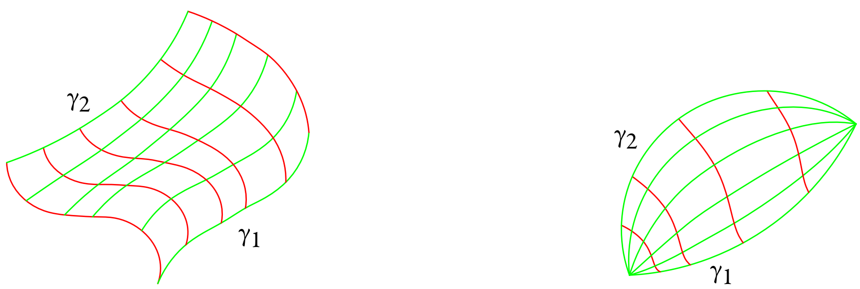

FIGURE 16. Homotopies libres et strictes

***Remarque A3.2.* —** Notons que pour des chemins γ_0 et γ_1 strictement homotopes $o(\gamma_0) = o(\gamma_1)$ et $t(\gamma_0) = t(\gamma_1)$.

***Proposition A3.3.* —** *La relation « est homotope à » (*resp. *« est strictement homotope à ») est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{C}(V,X)$ des applications continues de V dans X (*resp. *l'ensemble des chemins).*

Démonstration. — Notons $\sim$ une de ces deux relations.

Démontrons d'abord la *réflexivité* : Soit $\gamma \in \mathscr{C}(V, X)$. L'application $H : V \times [0,1] \to X$ donnée par $(x, u) \mapsto \gamma(t)$ est un homotopie de γ à γ qui est stricte si $V = [0,1]$.

Pour la *symétrie*, soient γ_0 et $\gamma_1 \in \mathscr{C}(V, X)$ telles que $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Soit $H : V \times [0,1] \to X$ une homotopie de γ_0 à γ_1. Alors l'application $\overline{H} : V \times [0,1] \to X$ donnée par $(x, u) \mapsto H(x, 1-u)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0 qui est stricte si l'homotopie H l'est. Donc $\gamma_1 \sim \gamma_0$.

Prouvons la *transitivité*. Soient γ_0, γ_1 et γ_2 des applications continues de V dans X telles que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ et $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Soient H_1 (resp. H_2) une homotopie de γ_0 à γ_1 (resp. de γ_1 à γ_2) alors l'application $H_1 * H_2 : V \times [0,1] \to X$ définie par

$$(x, u) \longmapsto \begin{cases} H_1(x, 2u) & \text{si } u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ H_2(x, 2u-1) & \text{si } u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

est une homotopie de γ_0 à γ_2 qui est stricte si H_0 et H_1 le sont toutes deux. □

***Proposition A3.4* (Changement de paramètre).** — *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Soit γ un chemin dans un espace topologique. Alors γ et $\gamma \circ \varphi$ sont strictement homotopes.*

Démonstration. — Il suffit de prendre l'homotopie donnée par

$$(t, u) \longmapsto \gamma((1-u)t + u\varphi(t)).$$

□

Lemme A3.5. — *Soient γ_1, γ_2 et γ_3 des chemins dans un espace topologique telles que $t(\gamma_1) = o(\gamma_2)$ et $t(\gamma_2) = o(\gamma_3)$. Alors le chemins $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ et $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ sont strictement homotopes.*

Démonstration. — Décrivons explicitement les chemins obtenus par juxtaposition :

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(4t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \gamma_2(4t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_3(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \text{ et } \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_2(4t-2) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ \gamma_3(4t-3) & \text{si } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Considérons alors l'application $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$t \longmapsto \begin{cases} 2t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ t + \frac{1}{4} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Alors l'égalité $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = (\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)) \circ \varphi$ permet d'appliquer la proposition A3.4. □

Lemme A3.6. — *Soit γ un chemin. Les chemins γ, $e_{o(\gamma)} * \gamma$ et $\gamma * e_{t(\gamma)}$ sont strictement homotopes.*

Démonstration. — Il suffir d'appliquer la proposition A3.4 aux applications de $[0,1] \to [0,1]$ définies respectivement par

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2t-1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \quad \text{et} \quad t \longmapsto \begin{cases} 2t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

□

Lemme A3.7. — *Soit γ un chemin. Le lacet $\gamma * \overline{\gamma}$ (*resp.* $\overline{\gamma} * \gamma$) est strictement homotope à $e_{o(\gamma)}$ (*resp.* $e_{t(\gamma)}$).*

Démonstration. — On considère l'application $H_0 : [0,1]^2 \to [0,1]$ définie par

$$(u,t) \longmapsto \begin{cases} u(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ u(1-2t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(*cf.* figure 17). Alors $H = \gamma \circ H_0$ fournit une homotopie de $e_{o(\gamma)}$ à $\gamma * \overline{\gamma}$. En faisant le changement

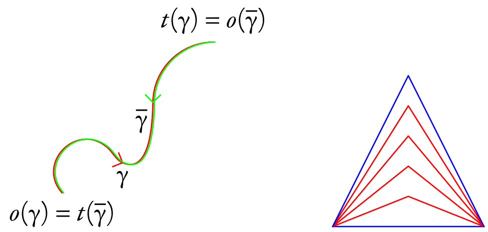

FIGURE 17. Aller-retour

de variables $t' = 1 - t$ on obtient le résultat analogue pour $\overline{\gamma} * \gamma$. □

Lemme A3.8. — *Soient γ_0, γ_1, γ_0' et γ_1' des chemins tels que γ_0 et γ_1 (*resp.* γ_0' et γ_1') sont juxtaposables et γ_0 (*resp.* γ_0') est* strictement *homotope à γ_1 (*resp.* γ_1'). Alors $\gamma_0 * \gamma_1$ est strictement homotope à $\gamma_0' * \gamma_1'$.*

Démonstration. — Soit H_0 (resp. H_1) une homotopie stricte de γ_0 à γ_1 (resp. de γ_0' à γ_1'). Alors l'application $H : [0,1]^2 \to X$ donnée par

$$(t,u) \longmapsto \begin{cases} H_0(2t, u) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ H_1(2t-1, u) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

est continue. En effet les homotopies étant strictes et les chemins juxtaposables,

$$H_0(1,u) = H_0(1,0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = H_1(0,1) = H_1(0,u).$$

L'application H est une homotopie de $\gamma_0 * \gamma_1$ à $\gamma_0' * \gamma_1'$. □

Lemme A3.9. — *Soient V, X et Y des espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application continue. Soient $\gamma_0 : V \to X$ et $\gamma_1 : V \to Y$ des applications continues. Si γ_0 est homotope (*resp. *strictement homotope) à γ_1, alors il en est de même de $f \circ \gamma_0$ (*resp. *$f \circ \gamma_1$).*

Démonstration. — Si H est une homotopie de γ_0 à γ_1, alors $f \circ H$ est une homotopie de $H \circ \gamma_0$ à $H \circ \gamma_1$. □

A3.2. Homéotopie. — Compte tenu du lemme A3.9, les constructions reposant sur l'homotopie des chemins vont donner des résultats similaires pour des espaces homéomorphes. Nous allons maintenant définir une notion plus faible qui préserve également ces objets.

Définition A3.10. — Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que X et Y sont *homéotopes* s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que la composée $g \circ f$ est homéotope à Id_X et $f \circ g$ est homéotope à Id_Y. On dit alors que l'application f est une *homéotopie* de X vers Y.

Ondit que l'espace X est *contractile* s'il est homéotope à un point.

Exemples A3.11. — i) Soit E un espace vectoriel normé et soit U une partie de E. Soit $a \in U$. On dit que U est *étoilée autour de a* si pour tout $x \in U$, le segment $[a, x]$ est contenu dans U. Démontrons maintenant qu'une partie étoilée est contractile. Soit $f : \{a\} \to U$ l'application

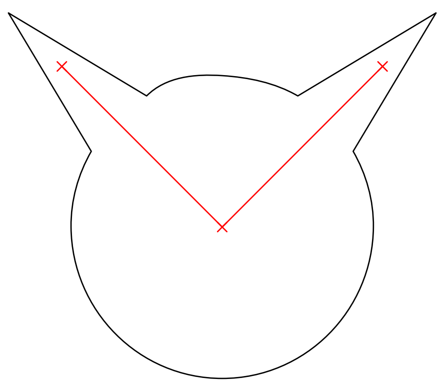

FIGURE 18. Partie étoilée

d'inclusion et $g : U \to \{a\}$ l'application constante. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\{a\}}$ et a fortiori $g \circ f$ est homotope à $\mathrm{Id}_{\{a\}}$ et l'application $H : U \times [0,1] \to U$ donnée par

$$(x,u) \longmapsto ux + (1-u)a$$

est une homotopie de $f \circ g$ à Id_U.

ii) Le plan épointé $\mathbf{C}^*$ est homéotope au cercle unité $\mathbf{U}$. En effet, on prends pour $f : \mathbf{U} \to \mathbf{C}^*$ l'application d'inclusion et pour $g : \mathbf{C}^* \to \mathbf{U}$ l'application donnée par $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{U}}$ et l'application donnée par

$$(z,u) \longmapsto uz + (1-u)g(z)$$

est une homotopie de $f \circ g$ à $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}^*}$.

A3.3. Groupe de Poincaré. — Nous allons commencer par quelques rappels sur les ensembles quotients

***Définition A3.12* (Rappel).** — Soit X un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Pour tout $x \in X$ la *classe d'équivalence* de x est la partie

$$[x] = \{ y \in X \mid y \mathscr{R} x \}$$

de X.

L'ensemble quotient, noté $X/\mathscr{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalences

$$X/\mathscr{R} = \{ [x], x \in X \}.$$

L'application $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ donnée par $x \mapsto [x]$ est appelée la *projection canonique*

Comme souvent en mathématiques, ce qui compte ce n'est pas la construction ensembliste de l'ensemble quotient, mais la propriété qu'il vérifie.

Propriété universelle du quotient. — *Soit X un ensemble, soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X et soit Y un ensemble. On note $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ la projection canonique. L'application $\varphi \mapsto \varphi \circ \pi$ est une bijection de l'ensemble $Y^{X/\mathscr{R}}$ des applications de $X/\mathscr{R}$ dans Y sur l'ensemble*

$$\{ f \in Y^X \mid \forall x, x' \in X,\ x \mathscr{R} x' \Rightarrow f(x) = f(x') \}.$$

Si $f : X \to Y$ appartient à cet ensemble, on dit que « f passe au quotient » et l'unique application $\overline{f} : X/\mathscr{R} \to Y$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$ s'appelle l'application déduite de f par passage au quotient.

***Théorème et définition A3.13* (Groupe de Poincaré).** — *Soit X un espace topologique. Soit $x \in X$. Soit Ω_x l'ensemble des lacets d'origine x. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble quotient de Ω_x par la relation d'homotopie* stricte. *Il existe une unique loi $*$ sur $\pi_1(X,x)$ telle que*

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega_x$. *Elle munit* $\pi_1(X,x)$ *d'une structure de groupe. Ce groupe est appelé* groupe de Poincaré *ou* groupe fondamental de X en x.

Démonstration. — L'unicité de la loi résulte de la surjectivité de la projection canonique. Le lemme A3.8 prouve que la loi $*$ est bien définie. Le lemme A3.5 prouve que $*$ est associative. Le lemme A3.6 montre que la lacet constant e_x est un élément neutre pour $*$, et le lemme A3.7 prouve que, pour tout $\gamma \in \Omega_x$, la classe $[\bar{\gamma}]$ est un inverse de $[\gamma]$. Cela prouve que $\pi_1(X,x)$ muni de la loi $*$ est un groupe. □

Commençons par un exemple élémentaire :

Exemple A3.14. — Si X est un singleton $\{x\}$, alors le groupe $\pi_1(X,x) = \{[e_x]\}$ est réduit à l'élément neutre.

Proposition et définition A3.15. — *Soit* $f : X \to Y$ *une application continue et soit* $x \in X$. *Il existe une unique application*

$$f_* : \pi_1(X,x) \to \Pi_1(Y, f(x))$$

telle que $f_*([c]) = [f \circ c]$. *C'est un morphisme de groupes.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme A3.9 et de l'égalité $f \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$. □

Pour définir le groupe de Poincaré, on a besoin d'un point base x. Il est naturel de se demander ce qui se passe quand on change de point base.

Proposition A3.16. — *Soit* X *un espace topologique. Soient* $x, y \in X$. *On suppose donné un chemin* c *d'origine* x *et de terme* y. *Alors l'application* h_c *de* $\pi_1(X,x)$ *vers* $\pi_1(X,y)$ *définie par la relation*

$$h_c([\gamma]) = [\bar{c} * \gamma * c]$$

est un isomorphisme de groupes dont la réciproque est donnée par

$$h_c^{-1}([\gamma]) = [c * \gamma * \bar{c}].$$

Démonstration. — Comme le lacet $\bar{c} * c$ est strictement au lacet constant e_y et $c * \bar{c}$ au lacet constant e_x, les deux applications sont bien réciproques l'une de l'autre. □

Remarque A3.17. — Si X est connexe par arcs, changer de point base donne un groupe qui est isomorphe au premier. Il faut néanmoins prendre garde au fait que l'isomorphisme entre les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ dépent du chemin choisi entre x et y. On ne peut donc pas parler d'isomorphisme canonique entre ces groupes.

Théorème A3.18. — *Soit* f *une homéotopie d'un espace topologique* X *vers un espace topologique* Y. *Soit* $x \in X$. *L'application* f_* *est un isomorphisme de groupes de* $\pi_1(X,x)$ *sur* $\pi_1(X, f(x))$.

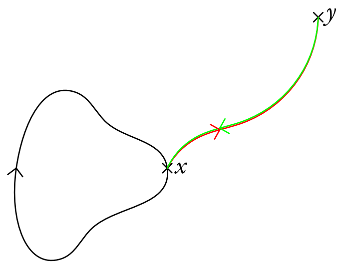

FIGURE 19. Changement de point base

Démonstration. — L'application f est une homéotopie. On fixe donc une application $g : Y \to X$ et une homotopie H_X (resp. H_Y) de $g \circ f$ à Id_X (resp. de $f \circ g$ à Id_Y). Il convient de noter que ces homotopies sont susceptibles de bouger les points x et $f(x)$. Soit $c : [0,1] \to X$ l'application donnée par $t \mapsto H_X(x,t)$ c'est un chemin d'origine $g \circ f(x)$ et de terme x. Démontrons que

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X, g \circ f(x))$$

est donnée par $g_* \circ f_*([\gamma]) = [c*(\gamma*\bar{c})]$. Pour cela considérons l'application $H : [0,1] \times [0,1] \to X$

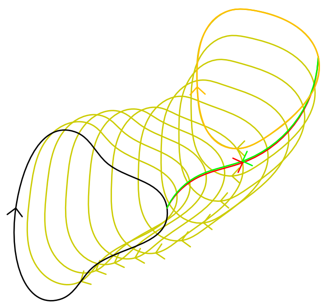

FIGURE 20. Invariance par homéotopie

donnée par

$$(t,u) \longmapsto \begin{cases} H_X(x, 2tu) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ H_X(\gamma(4t-2), u) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ H_X(x, (4-4t)u) & \text{si } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

est une homotopie stricte du lacet $e_{g \circ f(x)} * (g \circ f \circ \gamma * e_{g \circ f(x)})$ au lacet $c*(\gamma*\bar{c})$. Donc $[c*(\gamma*\bar{c})]$ est égal à $[g \circ f \circ \gamma]$. Mais par la proposition A3.16, l'application qui à la classe d'un chemin γ associe $[c*(\gamma*\bar{c})]$ est un isomorphisme de groupes. Cela prouve que $g_* \circ f_*$ est bijective. En échangeant les rôles de X et Y (resp. f et g), on en déduit également que $f_* \circ g_*$ est bijective. Donc f_* est bijective. C'est donc un isomorphisme de groupes. □

Définition A3.19. — Soit X un espace topologique connexe par arcs. On dit que X est simplement connexe si $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ pour un $x \in X$.

Remarque A3.20. — Comme X est supposé connexe par arcs, il résulte de la proposition A3.16 que le groupe $\pi(X, x)$ est alors trivial pour tout $x \in X$.

Corollaire A3.21. — *Un espace topologique contractile est simplement connexe.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème A3.18 et de l'exemple A3.14. □

Remarque A3.22. — En particulier tout ouvert étoilé de $\mathbf{C}$ est simplement connexe.

A3.4. Indice. — Nous allons traiter un exemple essentiel pour le cours d'analyse complexe.

Théorème A3.23. — *Soit a et b deux nombres complexes distincts. L'application de $\mathbf{Z}$ dans $\pi_1(\mathbf{C} - \{a\}, b)$ qui envoie un entier n sur la classe du lacet*

$$t \longmapsto a + (b - a)e^{2\pi n t i}$$

est un isomorphisme de groupes.

La preuve de ce résultat pourtant simple demande un peu de travail et nous allons la décomposer en plusieurs étapes.

Préliminaires de la preuve. — Tout d'abord $z \mapsto a + (b - a)z$ définit un homéomorphisme de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C} - \{a\}$ qui envoie 1 sur b. Cela nous permet de nous ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$. D'autre part, on a vu dans l'exemple A3.11 ii) que l'application $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ est un homéotopie de $\mathbf{C}^*$ sur le cercle unité $\mathbf{U}$, qui envoie 1 sur 1. Il nous suffit donc de démontrer que l'application $\tau : n \mapsto [\sigma_n]$ où σ_n est le lacet

$$t \longmapsto e^{2\pi n t i}$$

définit un isomorphisme de groupes de $\mathbf{Z}$ sur $\pi_1(\mathbf{U}, 1)$. □

Lemme A3.24. — *L'application τ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. — Soient p et q des entiers relatifs. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ l'application définie par

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{p}{p+q} 2t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{q}{p+q}(2t - 1) + \frac{p}{p+q} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

alors $\sigma_{p+q} \circ \varphi = \sigma_p * \sigma_q$. Il résulte alors de la proposition A3.4 que les lacets σ_{p+q} et $\sigma_p * \sigma_q$ sont strictement homotopes. On a donc

$$\tau(p+q) = [\sigma_{p+q}] = [\sigma_p * \sigma_q] = \tau(p) * \tau(q)$$

Donc τ est un morphisme de groupes. □

Il nous reste à prouver que ce morphisme est injectif et surjectif. Nous allons pour cela utiliser des relèvements des lacets. On note $\mathbf{e} : \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ l'application $t \mapsto e^{2\pi t i}$. C'est une application continue et un morphisme de groupes de noyau $\mathbf{Z}$.

Lemme A3.25. — *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{U}$ un chemin d'origine* 1*. Alors il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant les conditions*

(i) *L'application $\widetilde{\gamma}$* relève *γ, c'est-à-dire $\gamma = \mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma}$;*

(ii) $\widetilde{\gamma}(0) = 1$

Démonstration. — Démontrons d'abord l'*unicité* : Si les applications $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ vérifient les conditions (i) et (ii), alors $\gamma = \mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma}_1 = \mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma}_2$. Comme $\mathbf{e}$ est un morphisme de groupes, il en résulte que $\mathbf{e} \circ (\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2) = 1$. Donc $\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2$ est une application de l'intervalle $[0,1]$ qui est connexe dans $\mathbf{Z}$, partie discrète de $\mathbf{R}$. Elle est donc constante. Comme $\widetilde{\gamma}_1(0) = 0 = \widetilde{\gamma}_2(0)$, on obtient que $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2$.

Démontrons maintenant l'*existence*. Pour cela, on définit l'ensemble $A \subset [0,1]$ comme l'ensemble des nombres λ tels qu'il existe une application continue $\widetilde{\gamma}_\lambda : [0,\lambda] \to \mathbf{R}$ vérifiant les deux conditions

(i) $\gamma_{|[0,\lambda]} = \mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma}_\lambda$;

(ii) $\widetilde{\gamma}_\lambda(0) = 0$.

En posant $\widetilde{\gamma}_0 : 0 \mapsto 0$, on obtient que $0 \in A$. D'autre part si $\widetilde{\gamma}_\lambda$ vérifie les deux conditions, pour $\mu \in [0,\lambda]$ sa restriction à $[0,\mu]$ permet de prouver que $\mu \in A$. Donc l'ensemble A est un intervalle de $[0,1]$.

Notons $a = \sup(A)$. Par ce qui précède $\{0\} \cup [0,a[\subset A$. Comme γ est continue, il existe un nombre réel η strictement positif tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad |t-a| < \eta \Longrightarrow |\gamma(t) - \gamma(a)| < 1.$$

On pose $a' = \max\left(0, a - \frac{\eta}{2}\right)$ et $a'' = \min\left(1, a + \frac{\eta}{2}\right)$. Alors a' appartient à A ce qui nous fournit une application $\widetilde{\gamma}_{a'}$ qui vérifie les conditions (i) et (ii). Nous allons maintenant étendre ce relèvement à l'intervalle $[0,a'']$. La définition de η fournit, pour tout $t \in [a', a'']$, les inégalités

$$|\gamma(t) - \gamma(a')| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(a)| + |\gamma(a) - \gamma(a')| < 2$$

En divisant par $\gamma(a') \in \mathbf{U}$, on obtient

$$\left|\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')} - 1\right| < 2$$

Ce qui prouve que, pour $t \in [a, a']$ le quotient $\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')}$ appartient à $\mathbf{U} - \{-1\}$. Rappelons que l'application argument est continue de $\mathbf{C} -]-\infty, 0]$ est continue. Soit $\widetilde{\gamma}_{a''} : [0, a''] \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$t \longmapsto \begin{cases} \widetilde{\gamma}_{a'}(t) & \text{si } t \in [0, a'] \\ \widetilde{\gamma}_{a'}(a') + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')}\right) & \text{si } t \in [a', a''] \end{cases}$$

Les deux expressions donnent bien le même résultat pour $t = a'$ puisque $\operatorname{Arg}(1) = 0$. L'application $\widetilde{\gamma}_{a''}$ est donc continue. Les égalités

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma}_{a''}(t) &= \mathbf{e}\left(\widetilde{\gamma}_{a'}(a') + \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')}\right)\right) \\ &= \mathbf{e}(\widetilde{\gamma}_{a'}(a')) \times \mathbf{e}\left(\frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')}\right)\right) \\ &= \gamma(a') \times \exp\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(a')}\right)\mathrm{i}\right) \\ &= \gamma(a') \times \frac{\gamma(t)}{\gamma(a')} = \gamma(t) \end{aligned}$$

permettent de prouver que $\widetilde{\gamma}_{a''}$ est un relèvement de γ. Donc $a'' = \min\left(1, a + \frac{\eta}{2}\right) \in A$. Mais comme $a = \sup(A)$, il en résulte que $a + \frac{\eta}{2} \notin A$ et donc $1 \in A$ ce qui prouve l'existence. □

Lemme A3.26. — *Le morphisme de groupes τ est surjectif.*

Démonstration. — Soit γ un lacet de $\mathbf{U}$ d'origine 1. Le lemme précédent nous donne un chemin $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbf{R}$ d'origine 0 tel que $\mathbf{e} \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. En particulier $\mathbf{e}(\widetilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = 1$ et donc $\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbf{Z}$. Notons $H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{U}$ l'application définie par

$$(t, u) \longmapsto \mathbf{e}((1-u)\widetilde{\gamma}(t) + ut\widetilde{\gamma}(1)).$$

Cette application est continue, comme composée d'applications continues. et vérifie $H(t, 0) = \mathbf{e}(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$, $H(t, 1) = \mathbf{e}(\widetilde{\gamma}(1)t) = \sigma_{\widetilde{\gamma}(1)}(t)$ pour $t \in [0, 1]$ ainsi que $H(0, u) = \mathbf{e}(0) = 1$ et

$H(1,u) = \mathbf{e}(\widetilde{\gamma}(1)) = 1$. Donc H est une homotopie stricte de γ à $\sigma_{\widetilde{\gamma}(1)}$. Par conséquent $\tau(\widetilde{\gamma}(1)) = [\gamma]$ et τ est surjective. □

Pour démontrer la surjectivité, nous allons relever les homotopies :

Lemme A3.27. — *Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{U}$ une application continue telle que $H(0,u) = 1$ pour $u \in [0,1]$. Alors il existe une unique application continue $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) *L'application $\widetilde{H}$ relève H, c'est-à-dire $\mathbf{e} \circ \widetilde{H} = H$;*

(ii) $H(0,u) = 0$ *pour* $u \in [0,1]$.

Démonstration. — L'unicité ce démontre que dans le lemme A3.25.

Pour l'existence, notons que pour tout $u \in [0,1]$, l'application $H_u : t \mapsto H(t,u)$ est un chemin d'origine 1, auquel on peut appliquer le lemme A3.25 ce qui fournit une application continue $\widetilde{H}_u : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui vérifie les conditions (i) et (ii). Soit $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ l'application $(t,u) \mapsto \widetilde{H}_u(t)$. Elle vérifie les conditions (i) et (ii). Il reste à démontrer qu'elle est continue. Comme $[0,1]^2$ est compact et H continue, il en résulte que l'application H est uniformément continue. Autrement dit pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall t, t', u, u' \in [0,1], \qquad (|t - t'| < \eta \text{ et } |u - u'| < \eta) \Longrightarrow |H(t,u) - H(t'u')| < \varepsilon.$$

En appliquant cela avec $\varepsilon = 2$ on obtient $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tous $u, u' \in [0,1]$ vérifiant $|u - u'| < \eta$ on ait

$$\forall t \in [0,1], \quad |H(t,u) - H(t,u')| < 2$$

Par conséquent, $\frac{H(t,u)}{H(t,u')} \in \mathbf{U} - \{1\}$ dès que $|u - u'| < \eta$. Fixons $u \in [0,1]$. Par unicité de $\widetilde{H}_{u'}$, on obtient l'égalité

$$\widetilde{H}(t,u') = \widetilde{H}(t,u) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg}\left(\frac{H(t,u')}{H(t,u)}\right)$$

pour $t, u' \in [0,1]$ avec $|u' - u| < \eta$. Comme le terme de droite est continu en (t,u'), il en résulte que $\widetilde{H}$ est continue. □

Lemme A3.28. — *Le morphisme de groupes τ est injectif.*

Démonstration. — Soit $k \in \operatorname{Ker}(\tau)$, c'est-à-dire que $[\sigma_0] = [\sigma_k]$ Soit H une homotopie stricte de σ_0 à σ_k et soit $\widetilde{H}$ le relevé de H à $\mathbf{R}$ donnée par le lemme précédent. L'application $\widetilde{H}_0 : t \mapsto \widetilde{H}(t,0)$ relève σ_0. Par unicité du relevé c'est donc l'application constante nulle. De même $\widetilde{H}_1 : t \mapsto \widetilde{H}(t,1)$ est l'application $t \mapsto kt$. Mais pour tout $u \in [0,1]$, on a $\mathbf{e} \circ \widetilde{H}(1,u) = H(1,u) = 1$.

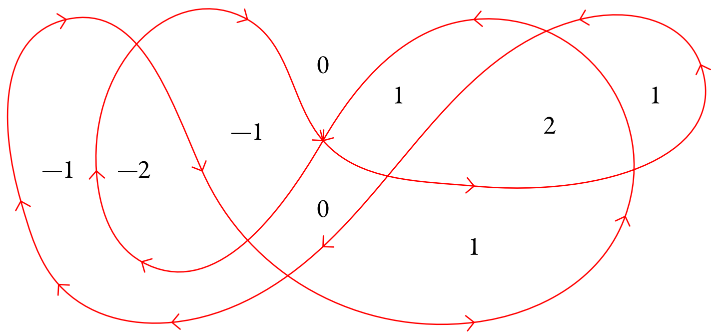

FIGURE 21. Calcul d'indice

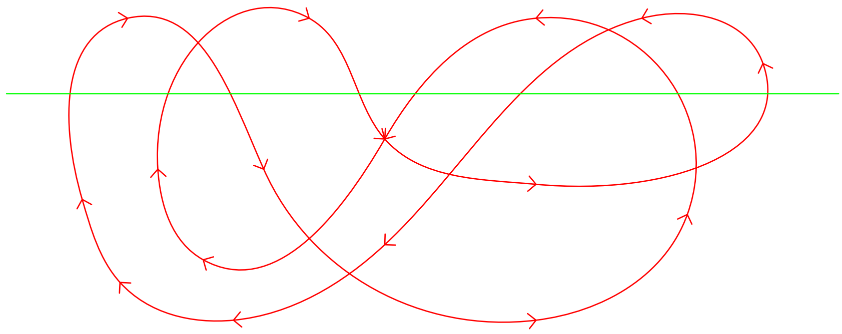

FIGURE 22. Algorithme de calcul

Donc $\widetilde{H}(1,u)\in\mathbf{Z}$. Comme $u\mapsto\widetilde{H}(1,u)$ est continue, elle est constante. Ce qui donne $k=0$ et prouve que $\mathrm{Ker}(\tau)=\{0\}$. Le morphisme de groupes τ est donc injectif. □

Définition A3.29. — Soit γ un lacet de $\mathbf{C}$ et $a\notin\gamma([0,1])$. alors l'*indice de* γ *en* a, noté $\mathrm{Ind}_a(\gamma)$ est l'entier correspondant à $[\gamma]\in\pi_1(\mathbf{C}-\{a\},\gamma(0))$ par la bijection définie dans le théorème A3.23.

Dessin A3.30. — Sur la figure 21, on a représenté un lacet et sur chaque composante connexe C de $\mathbf{C}-\gamma([0,1])$ le nombre indiqué est la valeur de $\mathrm{Ind}_a(\gamma)$ pour $a\in C$. Dans le cas d'un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, l'algorithme pour calculer ces valeurs est le suivant : Si on suit une droite Δ orientée par un vecteur $\vec{u}$ de sorte que, pour tout $P\in\Delta$, il existe au plus un $t\in[0,1]$ tel que $\gamma(t)=P$, la dérivée de γ en t est bien définie et $\gamma'(t)$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, Alors la base $(\gamma'(t),\vec{u})$ est soit directe soit indirecte, et la valeur de l'indice augmente de 1 si elle est directe, diminue de 1 dans le cas contraire.

Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que tout sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ est simplement connexe.

Exercice 2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la n-sphère

$$\mathbf{S}^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \}$$

est simplement connexe. On pourra commencer par démontrer que tout lacet de $\mathbf{S}^n$ qui évite au moins un point de $\mathbf{S}^n$ est strictement homotope à un lacet constant.

Exercice 3.

1. Démontrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour tout entier $n \geqslant 2$.
2. Démontrer que $\mathbf{R}^n$ privé d'un point est simplement connexe pour tout entier $n \geqslant 3$ mais pas pour $n = 2$ ou 3. En déduire que $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{T} = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ (c'est-à-dire le tore vu comme produit de deux cercles). Calculer le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathbf{T}, t)$ pour $t \in \mathbf{T}$.

Exercice 5.* On pose $U = \mathbf{C} - \{a, b\}$ avec $a \neq b$. On pose $r = \frac{|a-b|}{2}$ et $X = C(a, r) \cup C(b, r)$ appelé *bouquet* de deux cercles. On note x le point d'intersection de ces deux cercles.

1. Démontrer qu'il existe une surjection du groupe de Poincaré $\pi_1(U, x)$ sur le groupe $\mathbf{Z}^2$.
2. Démontrer que U et X sont homéotopes.
3. Démontrer que le groupe de Poincaré $\pi_1(U, x)$ n'est pas abélien.

Exercice 6. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ défini par $t \mapsto (1 + t(1-t))e^{4\pi t i}$. Vérifier que γ est un lacet et calculer $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$; interpréter le résultat en dessinant γ.

Exercice 7. Soit γ un lacet dans $\mathbf{C}^*$. On pose $g : z \mapsto z^n$ pour un $n \in \mathbf{N}$, Démontrer que $\mathrm{Ind}_0(g \circ \gamma) = n\,\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.

App. 4 Examens des années précédentes

A4.1. Partiel 2019

C désigne le corps des nombres complexes, **R** celui des nombre réels, **Z** l'anneau des entiers, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Question de cours. Énoncer le principe du maximum local pour une fonction holomorphe.

Exercice. On considère la détermination principale du logarithme

$$\mathrm{Log} : \mathbf{C} -]-\infty, 0] \to \mathbf{C}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique application holomorphe $f : \mathbf{C} - \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ telle que $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}^+$ et $f(-1) = i\pi$.
2. Déterminer la composée $\exp \circ f$.
3. Donner une expression simple des valeurs de la fonction $f - \mathrm{Log}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$.
4. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet-elle une primitive sur $\mathbf{C} - \{0\}$?

Problème. Dans tout ce problème, la lettre τ désigne un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive. On note Λ l'ensemble des nombres complexes z tels qu'il existe des entiers relatifs $m, n \in \mathbf{Z}$ tels que $z = m + n\tau$. On note également

$$\mathscr{D}_\tau = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists (x, y) \in [0, 1[^2, z = x + y\tau\}.$$

Soit X un ensemble. On dira qu'une application $f : \mathbf{C} \to X$ est Λ-périodique si

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall z \in \mathbf{C}, f(z + \lambda) = f(z).$$

Une fonction elliptique pour Λ est une fonction méromorphe qui est Λ-périodique.

1. Démontrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un unique couple $(z_e, z_r) \in \Lambda \times \mathscr{D}_\tau$ tel que
$$z = z_e + z_r.$$
2. (a) Démontrer qu'une fonction continue $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ qui est Λ-périodique admet un maximum.
   (b) Décrire l'ensemble des applications elliptiques holomorphes.
3. (a) Pour tout entier $M \geqslant 0$, déterminer le cardinal de l'ensemble des $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $\max(|m|, |n|) = M$.

(b) Démontrer qu'il existe un nombre réel $c > 0$ qui ne dépend que de τ tel que

$$\forall (m,n) \in \mathbf{Z}^2, \quad |m + n\tau| \geqslant c \max(|m|, |n|).$$

(c) Démontrer que la série $\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^t}$ converge pour $t > 2$.

4. Dans cette question, K désigne une partie compacte de $\mathbf{C}$ contenue dans l'ouvert $\mathbf{C} - \Lambda$.

(a) On note R un nombre réel tel que $K \subset B(0, R/2)$. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $|\lambda| > R$. Prouver qu'il existe un nombre réel $c > 0$ qui ne dépend que de R tel que

$$\forall z \in K, \quad \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| < \frac{c}{|\lambda|^3}.$$

(b) Démontrer que la somme

$$\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

converge normalement sur K au sens suivant : pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe une partie finie I de Λ contenant 0 telle que

$$\forall z \in K, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda - I} \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| < \varepsilon.$$

La fonction $\wp$ de Weierstraß de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est définie par

$$\wp(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) & \textit{si } z \notin \Lambda, \\ \infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

5. (a) Prouver qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que, pour tous nombres complexes non nuls z, z_0, on ait

$$\left| \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2} + 2\frac{z - z_0}{z_0^3} \right| \leqslant c \frac{|z - z_0|^2}{\min(|z|, |z_0|)^4}.$$

(b) Démontrer que $\wp$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \Lambda$ de dérivée donnée par

$$\wp'(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3},$$

pour $z \in \mathbf{C} - \Lambda$.

6. (a) Démontrer que $\wp(-z) = \wp(z)$ pour $z \in \mathbf{C}$.

(b) Démontrer que $\mathfrak{p}$ est une fonction elliptique pour Λ.

7. Pour tout entier $j \geqslant 3$ on pose

$$G_j(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^j}.$$

(a) Démontrer que $G_j(\Lambda)$ est nul si j est impair.

(b) Démontrer que le développement en série de Laurent de $\mathfrak{p}$ en 0 est donné par

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \geqslant 1} (2k+1) G_{2k+2}(\Lambda) z^{2k}.$$

A4.2. Corrigé du partiel 2019

Question de cours. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Si la fonction $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors f est constante.

Exercice. 1. **Unicité.** Si f_1 et f_2 conviennent, alors $f_1' - f_2' = 0$. Or, pour tout $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+$, le segment $[-1, z]$ est contenu dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$, ce qui prouve que $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ est connexe. Donc $f_1 - f_2$ est constante. Comme $f_1(-1) = i\pi = f_2(-1)$, il en résulte que $f_1 = f_2$.

Existence. Vérifions que l'application $f : z \mapsto \mathrm{Log}(-z) + i\pi$ convient. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+$, on a $f'(z) = \frac{-1}{-z} = \frac{1}{z}$ et $f(-1) = \mathrm{Log}(1) + i\pi = i\pi$.

2. Soit $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+$. Avec la construction de la question précédente, on a les égalités

$$\exp \circ f(z) = \exp(\mathrm{Log}(-z) + i\pi) = (-z) \times e^{i\pi} = z.$$

Donc $\exp \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}-\mathbf{R}_+}$.

3. Comme f et Log ont la même dérivée, $f - \mathrm{Log}$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbf{C} - \mathbf{R}$ à savoir le demi-plan supérieur $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C}, \mathfrak{I}(z) > 0\}$ et le demi-plan inférieur $-\mathbf{H}$. Mais en utilisant la formule de la première question,

$$f(i) - \mathrm{Log}(i) = \mathrm{Log}(-i) + i\pi - \mathrm{Log}(i) = -i\frac{\pi}{2} + i\pi - i\frac{\pi}{2} = 0$$

et

$$f(-i) - \mathrm{Log}(-i) = \mathrm{Log}(i) + i\pi - \mathrm{Log}(-i) = 2\pi i.$$

Donc l'application $f - \mathrm{Log}$ est l'application de $\mathbf{C} - \mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{I}(z) > 0, \\ 2\pi i & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Soit g une primitive de l'application $z \mapsto 1/z$ définie sur $\mathbf{C} - \{0\}$. Quitte à la remplacer par $g - g(1)$, on peut supposer que $g(1) = 0$. La fonction g coïncide alors avec Log sur $\mathbf{R} -]-\infty, 0]$. Comme f et Log coïncident sur le demi-plan supérieur, le raisonnement de la première question prouve que f est la restriction de g à $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$. Mais cela implique que $g(-i) = f(-i) \neq \mathrm{Log}(-i) = g(-i)$ ce qui donne une contradiction. Par conséquent, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Problème. 1. Soit $z \in \mathbf{C}$. Comme $\mathfrak{I}(\tau) > 0$, la famille $(1, \tau)$ forme une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Par conséquent, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $z = a + b\tau$.

Analyse. Supposons que $z = z_e + z_r$ avec $z_e \in \Lambda$ et $z_r \in \mathscr{D}_\tau$. Alors on peut écrire $z_u = m + n\tau$ avec $m, n \in \mathbf{Z}$ et $z_r = x + y\tau$ avec $x, y \in [0, 1[^2$. Donc

$$z = (m + x) + (n + y)\tau$$

ce qui prouve que $a = m + x$ et $b = n + y$. comme $0 \leqslant x < 1$, on a $m \leqslant a < m + 1$ ce qui prouve que m est nécessairement la partie entière $\lfloor a \rfloor$ de a et x sa partie fractionnaire $x = \{a\} = a - \lfloor a \rfloor$. De même $n = \lfloor b \rfloor$ et $y = \{b\}$.

Synthèse. Inversement

$$z_e = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \tau \quad \text{et} \quad z_r = \{a\} + \{b\}\tau$$

conviennent.

2. (a) L'ensemble

$$\overline{\mathscr{D}_\tau} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists (x, y) \in [0,1]^2, z = x + y\tau \}$$

est une partie compacte de $\mathbf{C}$, en tant qu'image de $[0,1]^2$ par une application linéaire continue. Donc f admet un maximum sur cette partie, notons $a \in \overline{\mathscr{D}_\tau}$ tel que

$$f(a) = \max\{f(z), z \in \overline{\mathscr{D}_\tau}\}.$$

Il suffit de démontrer que $f(a)$ est un majorant des valeurs de f. Soit $z \in \mathbf{C}$. Par la question 1, on peut écrire $z = z_e + z_r$ avec $z_e \in \Lambda$ et $z_e \in \mathscr{D}_\tau \subset \overline{\mathscr{D}_\tau}$. Comme f est Λ-périodique, $f(z) = f(z_r) \leqslant f(a)$. Donc

$$f(a) = \max\{f(z), z \in \mathbf{C}\}.$$

(b) Une fonction elliptique entière est continue et Λ-périodique. Donc, par la question précédente, $|f|$ est majorée. Donc f est une fonction entière bornée et donc constante par le théorème de Liouville.

3. (a) Pour tout $M \geqslant 0$, on a l'égalité

$$\mathrm{Card}(\{ (m,n) \in \mathbf{Z}^2 \mid \max(m,n) \leqslant M \}) = \mathrm{Card}\{-M, \ldots, M\}^2 = (2M+1)^2.$$

Donc si $M \geqslant 1$,

$$\mathrm{Card}(\{ (m,n) \in \mathbf{Z}^2 \mid \max(m,n) = M \}) = (2M+1)^2 - (2(M-1)+1)^2 = 8M.$$

et

$$\mathrm{Card}(\{ (m,n) \in \mathbf{Z}^2 \mid \max(m,n) = 0 \}) = 1.$$

(b) L'application qui un nombre complexe $z = a + b\tau$ associe $\max(|a|, |b|)$ est une norme sur $\mathbf{C}$, le résultat découle donc de l'équivalence des normes sur une espace vectoriel réel de dimension finie.

Si on veut expliciter la constante, notons que si $m + n\tau = x + yi$ alors $n = \frac{y}{\Im(\tau)}$ et $m + n\Re(\tau) = x$ ce qui donne

$$m = x - \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} y$$

et donc les inégalités

$$\begin{aligned}\max(|m|,|n|) &\leqslant \max\left(\frac{1}{\Im(\tau)}, 1+\frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)}\right)\max(|x|,|y|)\\ &\leqslant \max\left(\frac{1}{\Im(\tau)}, 1+\frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)}\right)|m+n\tau|.\end{aligned}$$

(c) Soit t un nombre réel tel que $t > 2$. Les questions précédentes fournissent les inégalités

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{|\lambda|^t} &= \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2-\{(0,0)\}}\frac{1}{|m+n\tau|^t}\\ &\leqslant \frac{1}{c^t}\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2-\{(0,0)\}}\frac{1}{\max(|m|,|n|)^t} \leqslant \frac{1}{c^t}\sum_{M>0}\frac{8M}{M^t}\end{aligned}$$

et cette dernière série converge, ce qui implique la convergence de la somme de nombres réels positifs considérée.

4. (a) Soit $z\in K$. On a les égalités

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right| = \left|\frac{\lambda^2-(z-\lambda)^2}{(z-\lambda)^2\lambda^2}\right| = \left|\frac{2z\lambda-z^2}{(z-\lambda)^2\lambda^2}\right|.$$

Or $|z-\lambda| \geqslant |\lambda|-|z| > |\lambda|/2$ puisque $|z| < \frac{R}{2} < \frac{|\lambda|}{2}$ et $|\lambda| > R$. Donc $|2z\lambda-z^2| < |\lambda|(R+\frac{R}{2})$. En définitive, on obtient l'inégalité

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right| < \frac{6R}{|\lambda|^3}.$$

(b) Soit $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$. Par la question 3 (b), l'ensemble

$$I_0 = \{\lambda\in\Lambda-\{0\} \mid |\lambda| < R\}$$

est fini. Par la question 3 (c), il existe un ensemble fini I_1 tel que $\sum_{\lambda\in\Lambda-I}\frac{1}{|\lambda|^3} < \frac{\varepsilon}{6R}$. Compte tenu de la question (a) l'ensemble $I = I_0\cap I_1$ donne la majoration voulue, ce qui prouve la convergence normale.

5. (a) Soient z et z_0 des nombres complexes non nuls. On a les relations

$$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}+2\frac{z-z_0}{z_0^3}=\frac{z_0^3-z_0z^2+2(z-z_0)z^2}{z^2z_0^3}$$
$$=(z-z_0)\frac{-z_0z-z_0^2+2z^2}{z^2z_0^3}$$
$$=(z-z_0)^2\frac{2z+z_0}{z^2z_0^3}.$$

Ce qui donne l'inégalité

$$\left|\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}+2\frac{z-z_0}{z_0^3}\right|\leqslant|z-z_0|^2\frac{3}{\min(|z|,|z_0|)^4}$$

(b) Soit $a\in\mathbf{C}-\Lambda$. Soit r un nombre réel strictement positif tel que $\overline{B(a,r)}\subset\mathbf{C}-\Lambda$. Si $|\lambda|>2|a|$, on a l'inégalité $\frac{1}{|a-\lambda|^3}<\frac{8}{|\lambda|^3}$ ce qui entraîne que la série $\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{|\lambda-a|^3}$ converge. Soit $z\in B(a,r)$. On peut alors écrire

$$\left|\mathfrak{p}(z)-\mathfrak{p}(a)+(z-a)\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{2}{(a-\lambda)^3}\right|$$
$$=\left|\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{(a-\lambda)^2}+2\frac{z-a}{(a-\lambda)^3}\right)\right|$$
$$\leqslant|z-z_0|^2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{3}{\min(|z-\lambda|,|a-\lambda|)^4}.$$

Si $\lambda>2(|a|+r)$, alors $\min(|z-\lambda|,|a-\lambda|)>\frac{|\lambda|}{2}$, D'autre part, comme $\overline{B(a,r)}\subset\mathbf{C}-\Lambda$, il existe un nombre réel $\eta>0$ tel que pour $\lambda\in\Lambda$ avec $\lambda<2(|a|+r)$, on ait l'inégalité

$$\min(|z-\lambda|,|a-\lambda|)>\eta.$$

Par conséquent, la somme $\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{3}{\min(|z-\lambda|,|a-\lambda|)^4}$ admet un majorant M lorsque z décrit $B(a,r)$. Autrement dit, on obtient l'inégalité

$$\left|\mathfrak{p}(z)-\mathfrak{p}(a)+(z-a)\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{2}{(a-\lambda)^3}\right|<M|z-z_0|^2$$

pour $z \in B(a,r)$. Ceci prouve que la fonction $\mathfrak{p}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-\Lambda$, de dérivée donnée par

$$\mathfrak{p}'(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3}.$$

6. (a) Si $z \in \mathbf{C}-\Lambda$, alors $-z \in \mathbf{C}-\Lambda$ et

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{(-z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{(z-(-\lambda))^2} - \frac{1}{(-\lambda)^2}\right) = \mathfrak{p}(z)\end{aligned}$$

puisque $\lambda \mapsto -\lambda$ est une bijection de Λ sur Λ. L'égalité vaut également pour $z \in \Lambda$.

(b) Soit $\mu \in \Lambda$. Le raisonnement de la question 5 (b) prouve que l'application $z \mapsto \mathfrak{p}(z) - \frac{1}{(z-\mu)^2}$ est holomorphe en μ. Par conséquent l'application $\mathfrak{p}$ est méromorphe en μ, comme somme d'applications méromorphes.

Comme $\lambda \mapsto \lambda+\mu$ est une bijection de Λ sur Λ, la formule de la question 5 (b) démontre que $\mathfrak{p}'(z+\mu) = \mathfrak{p}'(z)$ pour $z \in \mathbf{C}$. Par conséquent l'application $z \mapsto \mathfrak{p}(z+\mu) - \mathfrak{p}(z)$ est constante sur $\mathbf{C}-\Lambda$. Mais la question précédente donne la relation

$$\mathfrak{p}\left(-\frac{\mu}{2}\right) = \mathfrak{p}\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

ce qui prouve que la valeur de cette fonction constante est 0. Donc la fonction $\mathfrak{p}$ est elliptique pour Λ.

7. Comme $\lambda \mapsto -\lambda$ est une bijection de Λ sur lui-même, si j est un entier impair $G_j(-\lambda) = -G_j(\lambda)$ et donc $G_j(\lambda) = 0$.

Notons $\rho = \min\{\,|\lambda|, \lambda \in \Lambda - \{0\}\,\}$. Soit $z \in \mathbf{C}-\Lambda$ et $\lambda \in \Lambda$. On peut écrire

$$\frac{1}{(z-\lambda)} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^2} - 1\right) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n\geqslant 1}(n+1)\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n$$

Soit $r < \rho$ et soit $z \in B(0,r)$. Alors $\left|\frac{z}{\lambda}\right| < \frac{r}{\rho} < 1$. Donc

$$\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\sum_{n\geqslant 1}(n+1)\frac{|z|^n}{|\lambda|^{n+2}} \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(r-|\lambda|)^2} - \frac{1}{|\lambda|^2}\right)$$

et cette somme converge d'après les calculs de la question 4(a) et la question 2(c). On peut donc échanger les sommes et

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \sum_{n\geqslant 1} (n+1)\frac{z^n}{\lambda^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\geqslant 1}(n+1)\left(\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{\lambda^{n+2}}\right) z^n$$

ce qui démontre l'expression annoncée pour le développement de Laurent en 0, compte tenu de la question (a).

A4.3. Examen 2019

C désigne le corps des nombres complexes, **R** celui des nombre réels, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels positifs strictement positifs et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Question de cours. Énoncer le théorème de l'application conforme de Riemann.

Exercice. Soit R un nombre réel strictement positif. On note γ_R un chemin qui parcourt le bord du rectangle de sommets $-R, R, R+i\pi, -R+i\pi$.

1. Résoudre l'équation $e^{2z} = -1$.
2. Déterminer l'ensemble des pôles de la fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donnée par
$$z \longmapsto \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}.$$
3. Calculer le résidu de f au point $\frac{i\pi}{2}$.
4. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$.
5. Démontrer que $\int_{[R,R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de $\int_{[-R,-R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$?
6. (a) Prouver l'égalité
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x$$
   (b) En déduire la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x$$

Problème. Dans tout ce problème, on note φ une application de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$. À une telle suite on associe la fonction $S_\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ définie par la relation
$$S_\varphi(t) = \sum_{n \leqslant t} \varphi(n)$$
pour $t \in \mathbf{R}_+$. On note également
$$h_\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$
pour tout $s \in \mathbf{C}$ pour lequel la série converge. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ est appelée la série de Dirichlet associée à la fonction φ.

On note $\Re(s)$ la partie réelle d'un nombre complexe s et $\arg(s)$ son argument.

Généralités

1. Soit s_0 un nombre complexe tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\varphi(n)}{n^{s_0}}\right|$ converge.
   (a) Démontrer que, pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) \geqslant \Re(s_0)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\varphi(n)}{n^{s}}\right|$ converge.
   (b) On pose $\sigma_0 = \Re(s_0)$. Démontrer que la convergence est uniforme sur le demi-plan fermé
   $$\overline{D}_{\sigma_0} = \{ s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) \geqslant \sigma_0 \}.$$
   (c) Démontrer que la restriction de la fonction h_φ à l'ouvert
   $$D_{\sigma_0} = \{ s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > \sigma_0 \}$$
   est holomorphe. Donner sa dérivée.
2. Dans cette question on note η la série de Dirichlet associée à la fonction $n \mapsto (-1)^{n-1}$.
   (a) Démontrer que la série définissant $\eta(s)$ converge absolument si et seulement si $\Re(s) > 1$.
   (b) Soit $\sigma \in \mathbf{R}$. Démontrer que la série définissant $\eta(\sigma)$ converge si et seulement si $\sigma > 0$.
3. (a) Soient $t \in \mathbf{R}_+$ et $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) > 0$. Démontrer la relation
   $$\sum_{k \leqslant t} \frac{\varphi(k)}{k^s} = \frac{S_\varphi(t)}{t^s} + s \int_0^t \frac{S_\varphi(t)}{t^{s+1}} \mathrm{d}t.$$
   (b) Soient $1 \leqslant p < q$ des entiers et $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) > 0$. Prouver la relation
   $$\sum_{k=p}^{q} \frac{\varphi(k)}{k^s} = \frac{S_\varphi(q) - S_\varphi(p-1)}{q^s} + s \int_p^q \frac{S_\varphi(t) - S_\varphi(p-1)}{t^{s+1}} \mathrm{d}t.$$
4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k)$ converge. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ Démontrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout $t, t' \in \mathbf{R}$ qui satisfont $t > A$ et $t' > A$, on ait l'inégalité
   $$|S_\varphi(t) - S_\varphi(t')| < \varepsilon \cos(\theta).$$
   (b) On conserve les notations de la question **(a)**. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$ tels que $p > A + 1$ et $q > A + 1$ et soit $s \in \mathbf{C} - \{0\}$ tel que $|\arg(s)| < \theta$. Démontrer l'inégalite
   $$\left| \sum_{k=p}^{q} \frac{\varphi(k)}{k^s} \right| < \varepsilon.$$

5. On suppose que la série de Dirichlet associée à φ converge en $s_0 \in \mathbf{C}$.
   (a) Démontrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la série de Dirichlet converge uniformément sur
   $$\{ s \in \mathbf{C} - \{s_0\} \mid |\arg(s - s_0)| < \theta \}.$$
   (b) Soit $\sigma_0 = \Re(s_0)$. Démontrer que la restriction de h_φ au domaine
   $$D_{\sigma_0} = \{ s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > \sigma_0 \}.$$
   est une fonction holomorphe.

Le cas des fonctions arithmétiques. — On dit qu'une application $\varphi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ est *multiplicative* si elle vérifie la condition
$$\forall a, b \in \mathbf{N}^*, \quad \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$
Soient φ et ψ des applications de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$. On note $\varphi * \psi$ l'application de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$ définie par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi * \psi(n) = \sum_{a|n} \varphi(a)\psi(n/a).$$
On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on rappelle que tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ s'écrit de manière unique $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(n)}$ avec $\{p \in \mathscr{P} \mid v_p(n) \neq 0\}$ fini.

1. Soient φ et ψ des applications de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$ et soit $s \in \mathbf{C}$ tel que les séries de Dirichlet pour φ et ψ convergent absolument en s. Démontrer que la série de Dirichlet pour $\varphi * \psi$ converge absolument en s et que
$$h_{\varphi * \psi}(s) = h_\varphi(s) h_\psi(s).$$
2. Soit φ une application multiplicative. Démontrer que $\varphi(1) \in \{0, 1\}$ et que
$$\varphi(n) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \varphi(p^{v_p(n)}).$$
   pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Soit φ une fonction multiplicative telle que
$$|\varphi(p^k)| \leqslant C \tag{17}$$
   pour tout nombre premier p et tout $k \geqslant 0$.
   (a) Démontrer que $\varphi(n) = O(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
   (b) Démontrer que la série de Dirichlet associée à φ converge uniformément sur tout compact de $D_1 = \{ s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > 1 \}$.

4. On suppose que φ est une fonction multiplicative non nulle qui vérifie la condition de la question précédente.
   (a) Démontrer que le produit
   $$\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\right)$$
   converge uniformément sur tout compact du demi-plan D_1.
   (b) Démontrer l'égalité
   $$h_\varphi(s)=\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\right)$$
   pour $s\in D_1$.

A4.4. Partiel 2020

Ce devoir doit être fait seul, sans aide extérieure. Les seuls documents autorisés sont le polycopié du cours et vos notes issues des cours et des TDs.

La partie IV est optionnelle et ne rapporte au plus que deux points de bonus. Le lettre $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $\mathbf{R}$ celui des nombre réels, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème 1. L'objectif de ce problème est lié à l'étude, pour un nombre complexe c fixé et un nombre complexe a de la suite de nombre complexes $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ caractérisée par les relations

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + c,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. On notera $\varphi_c : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ l'application donnée par $z \mapsto z^2 + c$. Étant donné un ensemble X et une application $f : X \to X$, on note $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_X$ et $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ n-1}$ pour un entier $n \geqslant 1$. La suite ci-dessus est donc donnée par $u_n = \varphi_c^{\circ n}(a)$.

Dans ce problème, on note également $\mathbf{D}$ le disque unité, $\mathbf{U}$ le cercle unité dans $\mathbf{C}$ et

$$\mathscr{D} = \mathbf{C} -]-\infty, 0].$$

On rappelle que $\mathscr{D}$ est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.

Partie I. Racine carrée

1. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$.
   (a) Démontrer qu'il existe au plus une fonction continue $r_n : \mathscr{D} \to \mathbf{C}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
      (i) $\forall z \in \mathbf{C}, \quad r_n(z)^n = z$;
      (ii) $r_n(1) = 1$.
   (b) Démontrer qu'il existe une telle fonction r_n. Exprimez cette fonction à l'aide de la détermination principale du logarithme.
   (c) Démontrer que r_n est holomorphe et calculer sa dérivée.

Dans la suite on pose $r = r_2$ et on note $\sqrt{z}$ pour $r_2(z)$.

2. A-t-on la formule $\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ pour tous nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathscr{D}$ tels que $z_1 z_2 \in \mathscr{D}$?
3. Soient $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. On pose $z = \rho e^{i\theta}$. Exprimer $\sqrt{z} - \sqrt{\overline{z}}$ en termes de ρ et θ. Calculer la limite de cette expression pour un $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ fixé lorsque θ tend vers π.
4. Pour quelles parties $\widetilde{\mathscr{D}}$ de $\mathbf{C}$ contenant $\mathscr{D}$ existe-t-il une application continue $\widetilde{r} : \widetilde{\mathscr{D}} \to \mathbf{C}$ qui prolonge r ?

5. (a) Pour tout $z \in \mathscr{D}$, prouver que $\Re(\sqrt{z}) > 0$. En déduire que $|1+\sqrt{z}| > 1$.
   (b) Pour tout $h \in \mathbf{C} -]-\infty, -1]$, démontrer l'inégalité
$$|\sqrt{1+h} - 1| \leqslant |h|.$$
6. Pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{N}$ on définit
$$\binom{a}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(a-j).$$
   En particulier, $\binom{a}{0} = 1$. Démontrer la formule
$$\sqrt{1+h} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{1/2}{n}h^n$$
   pour tout $h \in \mathbf{D}$.

Partie II. Étude d'une application

On fixe dans cette partie un nombre complexe c.

1. Déterminer l'ensemble des $u \in \mathbf{C}$ tels que $1 + cu^2 \in]-\infty, 0]$.

On notera U_c le complémentaire de cet ensemble. Et on note $g_c : U_c \to \mathbf{C}$ l'application donnée par $u \mapsto \frac{u}{\sqrt{1+cu^2}}$.

2. Vérifier que U_c est un ouvert de $\mathbf{C}$ et que g_c est holomorphe.
3. Démontrer la majoration
$$\left|\frac{u}{g_c(u)} - 1\right| \leqslant |cu^2|$$
   pour tout $u \in U_c - \{0\}$.
4. On note $V_c = \mathbf{C} - [-\mathrm{i}\gamma, \mathrm{i}\gamma]$, où γ est une racine carrée de c. Démontrer qu'il existe une unique application holomorphe $f_c : V_c \to \mathbf{C}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :
   (i) $f_c(z)^2 = z^2 + c$ pour tout $z \in V_c$.
   (ii) $f_c(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini.

   Exprimer cette application à l'aide de g_c (indication : on pourra poser $u = 1/z$).
3. Démontrer que f_c est injective.
4. Démontrer que f_c définit un isomorphisme bianalytique de V_c sur son image.

Partie III. Étude de cas particuliers

On utilise les notations données en introduction au problème. En particulier c désigne un nombre complexe. On dit qu'un élément $a \in \mathbf{C}$ est *prépériodique pour* φ_c s'il existe deux entiers distincts $j, k \in \mathbf{N}$ tels que

$$\varphi_c^{\circ j}(a) = \varphi_c^{\circ k}(a).$$

Si $a \in \mathbf{C}$ est prépériodique, sa période est le plus petit entier strictement positif p tel que

$$\exists j \in \mathbf{N}, \quad \varphi_c^{\circ j}(a) = \varphi_c^{\circ j+p}(a).$$

1. Dans cette question on suppose que $c = 0$
   (a) Démontrer que pour tout entier $m > 0$ il existe deux entiers j et k distincts tels que m divise $2^j - 2^k$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points prépériodiques pour φ_0.
   (c) Démontrer que, pour tout entier $p > 0$, il existe au moins un point prépériodique pour φ_0 de période p.
   (d) Soit $p > 0$. L'ensemble de points prépériodiques pour φ_0 de période p est-il fini ?
2. Dans cette question on suppose que $c = -2$. On considère l'application $h : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ définie par $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.
   (a) Vérifier la relation
   $$h(z^2) = h(z)^2 - 2$$
   pour tout $z \in \mathbf{C}^*$.
   (b) Démontrer que la restriction H de l'application h à l'ouvert
   $$\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}} = \{ z \in \mathbf{C}, |z| > 1 \}$$
   est injective.
   (c) Prouver que $h(\mathbf{U}) \subset [-2, 2]$. Soit $t \in [-2, 2]$. Déterminer $h^{-1}(\{t\})$.
   (d) Démontrer que H définit un isomorphisme bianalytique de $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{C} - [-2, 2]$. On note H^{-1} sa réciproque.
   (e) Soit $z \in \mathbf{C} - [-2, 2]$. Donner une expression simple de $\varphi_{-2}^{\circ n}(z)$ en utilisant $H^{-1}(z)$.
   (f) Soit $z \in [-2, 2]$. Utiliser la question (c) pour donner une expression de $\varphi_{-2}^{\circ n}(z)$.
   (g) Déterminer l'ensemble des points prépériodiques pour φ_{-2}.

Partie IV. Étude à l'infini

Dans cette partie, la lettre c désigne à nouveau un nombre complexe arbitraire. On note a un nombre réel avec $a > \max(2, \sqrt{2|c|})$ et on pose

$$W_a = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| > a \} = \mathbf{C} - \overline{B}(0, a).$$

La lettre m désigne un entier strictement positif.

1. Soit $z \in W_a$. Justifier les minorations $|z^2 + c| > \frac{|z|^2}{2} > \frac{a}{2}|z|$. Pour un tel nombre z prouver que $|\varphi_c^{\circ m}(z)| > \left(\frac{a}{2}\right)^m |z|$.
2. Expliquer pourquoi on peut définir une application $F_m : W_a \to \mathbf{C}$ donnée par
$$z \longmapsto r_{2^m}\left(1 + \frac{c}{\varphi_c^{\circ(m-1)}(z)^2}\right)$$
où l'application r_{2^m} est définie dans la partie I.
3. Démontrer que, pour $z \in W_a$, on a la majoration
$$|F_m(z) - 1| \leqslant \left(\frac{2}{a}\right)^{2(m-1)} \frac{|c|}{|z|^2}.$$
4. On définit une application $H_m : W_a \to \mathbf{C}$ par la formule
$$H_m = z \times \prod_{k=1}^{m} F_k(z).$$
   (a) Vérifier que H_1 est la restriction de l'application f_c définie dans la partie II.
   (b) Démontrer la relation
   $$H_n(z)^2 = H_{n-1}(z^2 + c)$$
   pour tout $n \geqslant 2$ et tout $z \in W_a$.
5. Démontrer que la suite de fonctions $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers une application H sur W_a, c'est-à-dire que
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (n \geqslant N) \Longrightarrow (\forall z \in W_a, |H_n(z) - H(z)| \leqslant \varepsilon)$$
(On pourra éventuellement utiliser la question 3 et une majoration de $|\mathrm{Log}(1 + h)|$ pour $h \in B(0, \frac{1}{2})$ pour majorer $|\mathrm{Log} \circ F_n|$).

6. Démontrer que H vérifie l'équation
$$H(z)^2 = H(z^2 + c)$$
pour $z \in W_a$.
7. En déduire une expression simple de $H(\varphi_c^{\circ m}(z))$ en termes de $H(z)$.
8. Démontrer que H est holomorphe (indication : commencer par démontrer qu'elle est continue et qu'elle vérifie la formule de Cauchy. On pourra faire référence à une preuve du cours pour conclure, sans qu'il soit nécessaire de refaire cette preuve).
9. Démontrer qu'il existe un $a \in \mathbf{R}_+^*$ tel que H définit un isomorphisme bianalytique de W_a sur son image. (Indication : étendre par continuité l'application $u \mapsto \frac{1}{H(1/u)}$).

Note : après la fin de l'épreuve vous pouvez voir une représentation de ces applications H via le lien `https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~peyre/images/julia.mp4`

A4.5. Corrigé du partiel 2020

Problème 2. Partie I.

1. (a) Si les applications f et g conviennent, alors pour tout $z \in \mathscr{D}$, on a $g(z)^n = z \neq 0$ donc l'application g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$. Il en résulte que $f/g : \mathscr{D} \to \mathbf{C}$ est une application continue à valeur dans l'ensemble des racines n-èmes de l'unité :
$$\mu_n(\mathbf{C}) = \{ z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1 \}$$
qui est une partie finie de $\mathbf{C}$ et donc discrète. Comme $\mathscr{D}$ est connexe, l'application f/g est constante. Mais, par la condition (ii),
$$\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$
Donc les applications f et g sont égales.

(b) Pour tout $z \in \mathscr{D}$, on a
$$\exp(\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z))^n = \exp(\operatorname{Log}(z)) = z$$
et $\exp(\frac{1}{n}\log(1)) = \exp(0) = 1$. L'application continue $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)\right)$ convient donc. Dans la suite on posera $\sqrt[n]{z} = r_n(z)$ pour tout $z \in \mathscr{D}$.

(c) L'application r_n est holomorphe car c'est une composée d'applications holomorphes. Compte tenu de la formule donnée dans la question précédente, sa dérivée est donnée par
$$r_n'(z) = \frac{1}{nz}\exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)\right) = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz}.$$

2. Prenons $z = e^{\theta i}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$. Alors $\sqrt{z} = e^{\frac{\theta}{2}i}$. Donc si $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi[$, alors $\sqrt{z} \times \sqrt{z} = e^{\theta i}$, mais comme $2\theta \in]\pi, 2\pi[$, on obtient
$$\sqrt{z^2} = \sqrt{e^{(2\theta-2\pi)i}} = e^{(\theta-\pi)i} = -e^{\theta i}.$$

3. Comme $z = \rho e^{\theta i}$, son logarithme est donné par $\operatorname{Log}(z) = \log(\rho) + \theta i$. La formule de la question (b) donne donc
$$\sqrt{z} - \sqrt{\overline{z}} = \sqrt{\rho}(e^{\frac{\theta}{2}i} - e^{-\frac{\theta}{2}i}) = \sqrt{\rho}\, 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Cette expression tend vers $2\sqrt{\rho}\, i$ lorsque θ tend vers π.

4. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Si $|z| < \varepsilon^2$, alors $|\sqrt{z}| \leqslant \varepsilon$ donc $\sqrt{z}$ tend vers 0 quand z tend vers 0, ce qui prouve qu'on peut prolonger l'application r en une application continue $\widetilde{r}$ sur $\mathscr{D} \cup \{0\}$ en posant $\widetilde{r}(0) = 0$.

   Réciproquement, soit $\widetilde{\mathscr{D}}$ une partie de $\mathbf{C}$ contenant $\mathscr{D}$ et $\widetilde{r} : \widetilde{\mathscr{D}} \to \mathbf{C}$ une application continue qui prolonge r. Soit $z \in \widetilde{\mathscr{D}} - \mathscr{D}$. Alors $z = -\rho$ pour un $\rho \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $\widetilde{r}(\rho e^{\theta i})$ et $\widetilde{r}(\rho e^{-\theta i})$ convergent tous deux vers $\widetilde{r}(-\rho)$ lorsque θ tend vers π. Donc la différence $\widetilde{r}(\rho e^{\theta i}) - \widetilde{r}(\rho e^{-\theta i})$ tend vers 0 quand θ tend vers π. Compte tenu de la question précédente, cela impose que $2\sqrt{\rho}\,\mathrm{i} = 0$ et donc $\rho = 0$.

   Donc $\widetilde{\mathscr{D}}$ est égale à $\mathscr{D}$ ou à $\mathscr{D} \cup \{0\}$.

5. (a) Si $z = \rho e^{\theta i}$ avec $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\, e^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}$. Comme $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient que
   $$\Re(\sqrt{z}) = \sqrt{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0.$$
   Par conséquent
   $$|1 + \sqrt{z}| \geqslant |\Re(1 + \sqrt{z})| > 1.$$
   (b) Si $h \in \mathbf{C} -]-\infty, -1]$, alors $1 + h \in \mathscr{D}$. L'inégalité $|\sqrt{1+h} + 1| \geqslant 1$ donnée par la question précédente donne donc la minoration
   $$|h| = \left|\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)\right| \geqslant |\sqrt{1+h} - 1|$$
   pour tout $h \in \mathbf{C} -]-\infty, -1]$.

6. Pour obtenir le développement de Taylor en 1 de r, il nous faut calculer ses dérivées successives. On a déjà obtenu dans la question 1.(c) que $r'(z) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{z}}{z}$. Démontrons par récurrence sur n que la dérivée n-ème est donnée par
   $$r^{(n)}(z) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - j\right)\right)\frac{\sqrt{z}}{z^n} = \left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - j\right)\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\mathrm{Log}(z)\right).$$
   pour $z \in \mathscr{D}$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour n alors
   $$\begin{aligned} r^{(n+1)}(z) &= \left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - j\right)\right)\left(\frac{1}{2} - n\right)\frac{1}{z}\exp\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\mathrm{Log}(z)\right) \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n+1-1}\left(\frac{1}{2} - j\right)\right)\frac{\sqrt{z}}{z^{n+1}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour $n+1$. En particulier, cela donne $\frac{r^{(n)}(1)}{n!} = \binom{1/2}{n}$. Comme la boule $B(1,1)$ est contenue dans $\mathscr{D}$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \binom{1/2}{n} T^n$ est $\geqslant 1$ et on obtient

$$\forall h \in \mathbf{D}, \quad \sqrt{1+h} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} h^n.$$

Partie II.

1. Si $c = 0$, cet ensemble est vide. Sinon soit $\gamma \in \mathbf{C}$ tel que $c = \gamma^2$. Alors $1 + cu^2 \in]-\infty, 0]$ équivaut à $cu^2 \in]-\infty, -1]$ et donc à l'existence de $\lambda \in [1, +\infty[$ tel que $u^2 = -\frac{\lambda}{c}$. Mais cela équivaut à l'existence de $\lambda \in [1, +\infty[$ tel que $u = \mathrm{i}\frac{\lambda}{\gamma}$ ou $u = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\gamma}$. L'ensemble recherché est donc la réunion des deux demi-droites $\frac{\mathrm{i}}{\gamma}[1, +\infty[$ et $-\frac{\mathrm{i}}{\gamma}[1, +\infty[$.

2. Comme l'application $u \mapsto 1 + cu^2$ est continue et l'ensemble $]-\infty, 0]$ fermé dans $\mathbf{C}$, l'ensemble
$$\{ u \in \mathbf{C} \mid 1 + cu^2 \in]-\infty, 0] \}$$
est fermé dans $\mathbf{C}$. Donc U_c est ouvert. L'application $u \mapsto \sqrt{1+cu^2}$ est holomorphe comme composée d'applications holomorphes et ne s'annule pas sur U_c. L'application g_c est donc le quotient de deux applications holomorphes. Elle est donc holomorphe.

3. Si $u \in U_c - \{0\}$, on a $\frac{u}{g_c(u)} = \sqrt{1+cu^2}$ Il résulte donc de la question I.5.(b) que
$$\left| \frac{u}{g_c(u)} - 1 \right| \leqslant |cu^2|.$$

4. Si les applications f et g conviennent, alors $f^2 = g^2$ et $g(z) \neq 0$ sur V_c. Donc $\frac{f}{g}$ est une application continue à valeur dans $\{-1, 1\}$. Or V_c est connexe, car c'est la réunion des parties $\mathrm{i}\gamma(\mathscr{D} + 1)$ et $-\mathrm{i}\gamma(\mathscr{D} + 1)$ qui sont connexes et s'intersectent. Le quotient f/g est donc constant. Or, par la condition (ii) f/g tend vers 1 quand $|z|$ tend vers l'infini. Donc $f = g$ ce qui prouve l'unicité.

   Par la question 1, si $z \in V_c$ alors $1/z \in U_c$ et
$$g_c\left(\frac{1}{z}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{z}}{\sqrt{1+\frac{c}{z^2}}} \right)^2 = \frac{1}{z^2+c}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{g_c\left(\frac{1}{z}\right)^2} = z^2 + c.$$

Soit $f : V_c \to \mathbf{C}$ l'application donnée par $z \mapsto g_c(1/z)^{-1}$. Par la question 3,

$$\frac{\frac{1}{z}}{g_c\left(\frac{1}{z}\right)} - 1 = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

quand $|z|$ tend vers l'infini. Donc

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Donc $f(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$. Donc l'application f convient.

5. Soient $z_1, z_2 \in V_c$. Par définition si $f_c(z_1) = f_c(z_2)$, alors $z_1^2 + c = z_2^2 + c$ et donc $z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$. Mais comme $f_c(z) = g_c(1/z)^{-1}$, on en déduit, par définition de g_c, que $z_1 = z_2$. L'application f_c est donc bien injective.
6. Comme f_c est injective et holomorphe, elle définit un isomorphisme bianalytique de V_c sur son image.

Partie III.

1. (a) Comme m est strictement positif, l'ensemble $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est fini. Donc il existe deux entiers j et k distincts tels que 2^j et 2^k ont la même classe dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (ou, ce qui revient au même, le même reste dans la division euclidienne par m). Donc $2^j \equiv 2^k[m]$ c'est-à-dire m divise $2^j - 2^k$.

   (b) L'application φ_0 est donnée par $z \mapsto z^2$. Donc $\varphi_0^{\circ k}$ est l'application $z \mapsto z^{2^k}$. Donc le nombre complexe z est prépériodique pour φ_0 si et seulement s'il existe deux entiers distincts j et k tels que

(18) $$z^{2^j} = z^{2^k}.$$

   Quitte à les échanger on peut supposer $j > k$. Si $z = 0$, alors $0^1 = 0^2$ donc 0 est prépériodique. Si $z \neq 0$, alors l'équation (18) nous donne $z^{2^j - 2^k} = 1$ donc z est une racine $2^j - 2^k$-ème de l'unité. Donc z appartient à l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbf{C}$:

$$\mu_\infty(\mathbf{C}) = \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists n \in \mathbf{N} - \{0\}, z^n = 1 \}.$$

Réciproquement, supposons que z est une racine de l'unité. Soit $m \geqslant 1$ tel que $z^m = 1$. Par la question (a), il existe deux entiers distincts j et k tels que m divise $2^j - 2^k$. Donc $z^{2^j - 2^k} = 1$ et $z^{2^j} = z^{2^k}$ ce qui prouve que z est prépériodique pour φ_0.
L'ensemble des points prépériodiques pour φ_0 est $\mu_\infty(\mathbf{C}) \cup \{0\}$.

(c) Si $p = 1$ alors 0 et 1 conviennent.
On suppose maintenant $p \geqslant 2$. Soit z une racine primitive $2^p - 1$-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. (Autrement dit, $z^{2^p - 1} = 1$ mais $z^k \neq 1$ si $0 < k < 2^p - 1$; on peut prendre $z = \exp(\frac{2\pi}{2^p - 1}\mathrm{i})$). Alors $z^{2^p} = z$, ce qui prouve que z est prépériodique et que sa période d vérifie $d \leqslant p$. Soient j et k des entiers tels que $z^{2^j} = z^{2^k}$. Alors $z^{2^j - 2^k} = 1$ et, en effectuant la division euclidienne de $2^j - 2^k$ par $2^p - 1$, on en déduit que $2^p - 1$ divise $2^j - 2^k$. Soit b_j (resp. b_k) le reste de la division euclidienne de j (resp. k) par p. On peut écrire $j = pa + b_j$. Donc $2^j = 2^{pa + b_j} = (2^p)^a \times 2^{b_j}$ qui est congru à 2^{b_j} modulo $2^p - 1$. Donc $2^p - 1$ divise également $2^{b_j} - 2^{b_k}$ Mais $0 \leqslant b_j < p$ et $0 \leqslant b_k < p$. Donc $|2^{b_j} - 2^{b_k}| \leqslant 2^{p-1} < 2^p - 1$ puisque $p \geqslant 2$. Donc $2^{b_j} = 2^{b_k}$ ce qui implique $b_j = b_k$. Donc p divise $j - k$ ce qui prouve que $d \geqslant p$ et donc que p est la période de z.

(d) Soit $k \in \mathbf{N}$. Si $z \neq 0$ est prépériodique de période p, alors toute racine 2^k-ème de z l'est également. Or il existe 2^k telles racines. Donc il y a une infinité de points prépériodiques de période p.

2. (a) Les égalités

$$h(z)^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 = h(z^2) + 2$$

donnent $h(z^2) = h(z)^2 - 2$ pour $z \in \mathbf{C}^*$.

(b) Soient z_1 et z_2 des éléments de $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$ tels que $H(z_1) = H(z_2)$. La relation $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$ donne

$$z_1^2 z_2 + z_2 = z_1 z_2^2 + z_1$$

et donc $(z_1 z_2 - 1)(z_1 - z_2) = 0$. Donc $z_1 = z_2$ ou $z_1 z_2 = 1$. Mais comme $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$, on obtient $|z_1 z_2| > 1$ et donc $z_1 z_2 \neq 1$. Par conséquent, l'application H est injective.

(c) si $z \in \mathbf{U}$, alors on peut écrire z sous la forme $z = e^{\theta i}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$. Donc $z + \frac{1}{z} = e^{\theta i} + e^{-\theta i} = 2\cos(\theta) \in [-2, 2]$. Inversement si $t \in [-2, 2]$, l'équation $z + \frac{1}{z} = t$ équivaut à $z^2 - tz + 1 = 0$. Elle a donc deux solutions si $t^2 \neq 4$, une sinon. Soit $\theta = \arccos(t/2)$, on obtient que $h^{-1}(\{t\}) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

(d) Comme H est holomorphe et injective, elle définit un isomorphisme bianalytique de $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$ sur son image.

Mais pour $a \in \mathbf{C} - [-2, 2]$, l'équation $H(z) = a$ équivaut à l'équation $z + \frac{1}{z} = a$ et donc à $z^2 - az + 1 = 0$. Soit $z_1 \in \mathbf{C}$ une solution de cette équation. Alors $z_1 \neq 0$ et $h(z_1) = a$. Comme $a \notin [-2, 2]$, il résulte de la question précédente que $z_1 \notin \mathbf{U}$. Donc $|z_1| \neq 1$. Or $h(z_1) = h\left(\frac{1}{z_1}\right) = a$ et $|z_1| > 1$ ou $\left|\frac{1}{z_1}\right| > 1$. Cela prouve que $\mathbf{C} - [-2, 2]$ est contenu dans l'image de H.

Par la question précédente, $[-2, 2]$ n'intersecte pas cette image, ce qui donne l'inclusion inverse.

Donc H définit un isomorphisme bianalytique de $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{C} - [-2, 2]$.

(e) Si $z \in \mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$, alors $z^2 \in \mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$. On a donc la relation $H(z^2) = H(z)^2 - 2$ pour $z \in \mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$, qui se réécrit $\varphi_{-2}(H(z)) = H(z^2) = H(z^2)$. Démontrons par récurrence la formule

$$\varphi_{-2}^{\circ n}(z) = H(H^{-1}(z)^{2^n})$$

pour $z \in \mathbf{C} - [-2, 2]$. Elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons-la pour n. Alors il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\varphi_{-2}^{\circ n}(z) \in \mathbf{C} - [-2, 2]$ et en appliquant la formule obtenue pour $n = 1$,

$$\varphi_{-2}^{\circ n+1}(z) = \varphi_{-2}(H(H^{-1}(z)^{2^n})) = H((H^{-1}(z)^{2^n})^2) = H(H^{-1}(z)^{2^{n+1}}).$$

(f) On peut écrire $z = 2\cos(\theta) = h(e^{\theta i})$ pour un nombre réel θ. La relation $h(u^2) = h(u)^2 - 2$ pour $u \in \mathbf{C}^*$ donne, comme dans la question précédente que $\varphi_{-2}^{\circ n}(h(u)) = h(u^{2^n})$. Donc $\varphi_{-2}^{\circ n}(z) = 2\cos(2^n\theta)$.

(g) L'application H est bijective de $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{C} - [-2, 2]$. Si $z \in \mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}$, il résulte donc de la question (e) que z est prépériodique pour φ_{-2} si et seulement si $H^{-1}(z)$ est prépériodique pour φ_0. Par la question 1.(b), il en résulte que z n'est pas prépériodique. Si $z = 2\cos(\theta)$ alors z prépériodique si et seulement s'il existe deux entiers distincts j et k tels que $\cos(2^j\theta) = \cos(2^k\theta)$ ce qui implique que $(2^j - 2^k)\theta$ ou $(2^j + 2^k)\theta$ est divisible par 2π. Par conséquent, il existe $t \in \mathbf{Q}$ tel que $\theta = t\pi$.

Réciproquement, si $\theta = t\pi$ avec $t \in \mathbf{Q}$, alors $e^{i\theta} \in \mu_\infty(\mathbf{C})$ est un point prépériodique pour φ_0 d'après la question 1.(b). Donc $z = h(e^{i\theta})$ est prépériodique pour φ_{-2}.

Partie IV.

1. La seconde inégalité triangulaire donne la minoration $|z^2 + c| \geqslant |z|^2 - |c|$. Si $|z| > a$, alors $|z| > \sqrt{2|c|}$, ce qui donne $|c| < \frac{|z|^2}{2}$. Donc
$$|z^2 + c| \geqslant \frac{|z|^2}{2} \geqslant \frac{a}{2}|z|.$$
Comme $|z^2 + c| > \frac{a}{2}|z|$, $|z| > a$ et $a > 2$, on obtient que $|z^2 + c| > a$ et donc $\varphi_c(W_a) \subset W_a$. Par récurrence sur $n \geqslant 1$ on obtient alors que
$$|\varphi_c^{\circ n}(z)| > \left(\frac{a}{2}\right)^n |z|.$$

2. Si $m = 1$, alors $|\varphi_c^{\circ(m-1)}(z)^2| = |z|^2 > a^2 \geqslant 2|c|$ Donc, dans ce cas,
$$\left|\frac{c}{\varphi_c^{\circ(m-1)}(z)^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$
et donc
$$1 + \frac{c}{\varphi_c^{\circ(m-1)}(z)^2} \in \mathscr{D}.$$
Si $m > 1$, par la question 1,
$$|\varphi_c^{\circ m-1}(z)| > \left(\frac{a}{2}\right)^{m-1} |z| > \frac{a^2}{2} \geqslant |c|.$$
Donc on a également
$$1 + \frac{c}{\varphi_c^{\circ(m-1)}(z)^2} \in \mathscr{D}.$$

3. Par la question I.5.(b), $|\sqrt{1+h} - 1| \leqslant |h|$. Donc, par récurrence sur n, on en déduit que
$$|r_{2^n}(1+h) - 1| = |r^{\circ n}(1+h) - 1| \leqslant |h|.$$
Donc
$$|F_m(z) - 1| \leqslant \left|\frac{c}{\varphi_c^{\circ(n-1)}(z)^2}\right|.$$

En appliquant la question 1, on obtient alors la majoration

$$|F_m(z)-1| \leqslant \frac{|c|}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1}|z|\right)^2} = \left(\frac{2}{a}\right)^{2(m-1)} \frac{|c|}{|z|^2}.$$

4. (a) Des égalités

$$H_1(z) = z \times \sqrt{1+\frac{c}{z^2}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{z}}{\sqrt{1+\frac{c}{z^2}}}} = \frac{1}{g_c\left(\frac{1}{z}\right)},$$

on déduit que $H_1 = f_c$.

(b) La suite d'égalités

$$\begin{aligned} H_n(z)^2 &= z^2 \times \left(1+\frac{c}{z^2}\right) \times \prod_{k=2}^{m} r_{2^{k-1}}\left(1+\frac{c}{\varphi_c^{\circ(k-2)}(z^2+c)^2}\right) \\ &= (z^2+c) \times \prod_{k=1}^{m-1} r_{2^k}\left(1+\frac{c}{\varphi_c^{\circ(k-1)}(z^2+c)^2}\right) \\ &= H_{n-1}(z^2+c) \end{aligned}$$

fournit le résultat.

5. La question 3 fournit la majoration

$$|F_m(z)-1| \leqslant \left(\frac{2}{a}\right)^{2(m-1)} \frac{|c|}{|z|^2} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{19}$$

pour tout $z \in W_a$. Or pour $z \in B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|\operatorname{Log}(1+h)| \leqslant \max_{u \in B(1,\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{|u|}\right)|h| = 2|h|.$$

Donc pour tout $z \in W_a$,

$$|\operatorname{Log} \circ F_m(z)| \leqslant 2\left(\frac{2}{a}\right)^{2(m-1)} \frac{|c|}{|z|^2}$$

En particulier, la série de fonctions $\sum_{m\in\mathbf{N}} \operatorname{Log}\circ F_m$ converge normalement sur W_a et on définit H comme l'application qui à $z \in W_a$ associe

$$H(z) = z\exp\left(\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Log}\circ F_m(z)\right).$$

Posons $M = \sum_{m\geqslant 0}\left(\frac{2}{a}\right)^{2(m-1)}$. Comme $|\exp(z)| \leqslant \exp(M)$ pour $z \in \overline{B}(0,M)$, l'inégalité des accroissements finis donne que $|\exp(x)-\exp(y)| \leqslant \exp(M)|x-y|$ pour $x,y \in \overline{B}(0,M)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n\geqslant N}\left(\frac{2}{a}\right)^{2(n-1)} < \frac{\varepsilon}{2|c|\exp(2M)}$. Alors pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in W_a$, on obtient

$$\begin{aligned}|H(z)-H_n(z)| &= |z| \times \prod_{k=1}^{n} |F_k(z)| \times \left|\exp\left(\sum_{k>n} \operatorname{Log}\circ F_k(z)\right)-1\right| \\ &\leqslant |z|\exp(M)\exp(M)\left|\sum_{k>n} \operatorname{Log}\circ F_k(z)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{|z|}.\end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence uniforme de H_n sur W_a.

6. Cela résulte de la relation de la question 4.(b) en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini.
7. Comme $H\circ\varphi_c = \varphi_0\circ H$, on en déduit par récurrence sur n que $H\circ\varphi_c^{\circ n} = \varphi_0^{\circ n}\circ H$. Donc
$$H(\varphi_c^{\circ n}(z)) = H(z)^{2^n}.$$
8. Comme une limite uniforme d'applications continues est continue, l'application H est continue. Soit $b \in W_a$ et $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{B}(b,R) \subset W_a$. Soit $c \in B(b,R)$ Alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-c}$ est bornée sur le cercle $C(b,R)$ donc la suite de fonctions $z \mapsto \frac{H_n(z)}{z-c}$ converge uniformément vers la fonction $z \mapsto \frac{H(z)}{z-c}$ sur ce cercle. Comme les applications H_n sont holomorphes, l'égalité
$$\int_{C(b,R)} \frac{H_n(z)}{z-c}\mathrm{d}z = H_n(c)$$

vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left|\frac{H_n(z)}{z-c} - \frac{H(z)}{z-c}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi R}$$

pour $n \geqslant N$ et $z \in C(b,R)$. Alors

$$\left|\int_{C(b,R)} \frac{H_n(z)}{z-c}\mathrm{d}z - \int_{C(b,R)} \frac{H(z)}{z-c}\mathrm{d}z\right| \leqslant \varepsilon$$

pour $n \geqslant N$. Donc

$$\int_{C(b,R)} \frac{H(z)}{z-c}\mathrm{d}z = H(c).$$

Cela prouve que H vérifie le formule de Cauchy. Mais la preuve de l'analyticité des fonctions holomorphes prouve que toute application qui vérifie la formule de Cauchy est analytique et donc holomorphe. Donc H est holomorphe.

9. Soit G l'application définie par

$$u \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{H\left(\frac{1}{u}\right)} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors G est holomorphe sur $B\left(1, \frac{1}{a}\right) - \{0\}$. Mais il résulte des majorations de la question 5 que $H(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini. Donc G est dérivable en 0 de dérivée 1. Donc, par le théorème d'inversion locale, il existe $a' > 0$ tel que G induise un isomorphisme bianalytique de $B(0,a')$ sur son image. Comme $z \mapsto \frac{1}{z}$ est un isomorphisme bianalytique de $\mathbf{C}^*$ sur lui-même, l'application H induit un isomorphisme bianalytique de $W_{a'}$ sur son image.

LISTE DES FIGURES

GLOSSAIRE

INDEX

W