

La Quartique de KLEIN

François L 

Juin - Juillet 2009

Résumé

Ce rapport présente la quartique de KLEIN, courbe exceptionnelle étudiée sous différents angles : courbe projective complexe, surface de RIEMANN, polyèdre hyperbolique et courbe modulaire. Nous rencontrerons notamment le groupe simple d'ordre 168. Je tiens personnellement à remercier Jérôme GERMONI pour m'avoir guidé tout au long de ce périple.

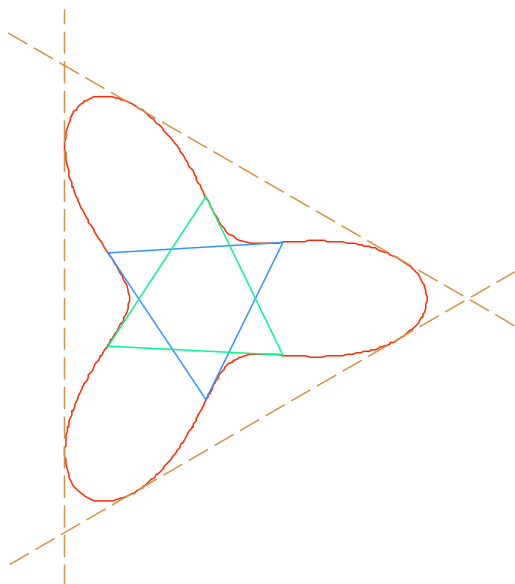
Table des matières

1	La quartique dans le plan projectif	2
1.1	étude de la courbe réelle	3
1.1.1	Les bitangentes	3
1.1.2	Les inflexions	3
1.2	étude de la courbe dans le plan projectif complexe	4
1.2.1	Utilisation des triangles d'inflexion	5
1.2.2	Les automorphismes de K	7
1.2.3	Isomorphisme entre G et $GL_3(\mathbb{F}_2)$	9
1.2.4	Isomorphisme entre G et $PSL_2(\mathbb{F}_7)$	10
1.2.5	Pourquoi la quartique de KLEIN est-elle exceptionnelle?	11
2	Recollement de triangles hyperboliques	11
2.1	Principe général	11
2.2	Pavage du disque de POINCARÉ	12
2.2.1	Groupe diédral	12
2.2.2	Notations et énoncé du théorème	13
2.2.3	Démonstration du théorème	14
2.2.4	Retour à notre problème	16
2.3	Le sous-groupe Λ	17
2.4	Recollement des triangles	18
2.5	Reconnaissance de \mathbb{D}/Λ	19

3	La quartique de Klein comme courbe modulaire	19
3.1	Quelques généralités	20
3.2	Le cas $N = 1$: groupe et invariant modulaires	20
3.3	Le cas $N = 2$	21
3.4	Le cas $N = 5$: icosaèdre	21
3.5	Le cas $N = 7$: la quartique de KLEIN	22
A	Annexe 1 : Les formules de Plücker	23
A.1	Courbe polaire	23
A.2	Courbe duale	24
A.3	Les formules de Plücker	26
B	Annexe 2 : Genre, revêtements et recollements	27
B.1	Genre et revêtements	27
B.2	Genre et recollements	28
	Bibliographie	28

1 La quartique dans le plan projectif

La quartique de KLEIN est une courbe algébrique projective complexe de degré quatre. Suivant les traces de Daniel PERRIN ([Pe1]), nous allons partir d'une coupe de la courbe dans un plan réel, avant d'en déterminer une équation. Voici donc une telle coupe, la quartique apparaissant en rouge :



L'examen de la figure révèle d'ores et déjà des propriétés remarquables. Tout d'abord, il semble que toute droite coupe la courbe en au plus quatre points, ce qui suggère qu'il s'agit

bien d'une quartique. Nous pouvons de plus remarquer la présence de trois bitangentes (en pointillés sur la figure) et de six points d'inflexion formant entre eux deux *triangles d'inflexion* : il s'agit de triangles dont les sommets sont des points d'inflexion et dont les côtés sont les tangentes inflexionnelles associées. Ces triangles sont en bleu et en vert sur la figure. Enfin, le groupe diédral du triangle $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$ semble être un groupe de symétrie de la quartique.

Nous allons étudier tout cela un peu plus finement, en restant pour l'instant dans un cadre affine réel.

1.1 Étude de la courbe réelle

Dans ce paragraphe, nous allons établir une équation de la courbe représentée ci-dessus à partir des bitangentes, et calculer les coordonnées des points d'inflexion.

1.1.1 Les bitangentes

Notons K_0 la quartique (réelle) représentée sur la figure précédente. Ses bitangentes forment un triangle de sommets 1 , j et j^2 ; elles ont donc pour équations $2x + 1 = 0$, $-x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ et $-x - \sqrt{3}y + 1 = 0$. De plus, les points de contacts sont tous situés sur un cercle de centre O , dont on notera R le rayon. On cherche donc une équation d'une courbe algébrique de degré 4, lisse, invariante par D_3 et dont les intersections avec les droites précédentes soient de multiplicité 2, et situés sur un cercle de rayon R . Pour tout choix de $k \in \mathbb{R}$, l'équation suivante remplit ces conditions :

$$(2x + 1)(-x + \sqrt{3}y + 1)(-x - \sqrt{3}y + 1) - k(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 0$$

Pour les constantes, nous choisissons $k = 3$ et $R = \frac{2}{7}$, afin d'obtenir effectivement la courbe de la figure. L'équation de K_0 est donc

$$49(2x + 1)(-x + \sqrt{3}y + 1)(-x - \sqrt{3}y + 1) - 3(7(x^2 + y^2) - 4)^2 = 0$$

Notons bien qu'il ne s'agit pas de l'équation usuelle de la quartique de KLEIN, mais de l'équation de l'image de la quartique par une certaine homographie, homographie que nous calculerons un peu plus tard.

1.1.2 Les inflexions

Nous avons déjà signalé que les points d'inflexion semblent former deux triangles d'inflexion. Nous allons calculer les coordonnées des points d'inflexions, et le lecteur pourra alors vérifier l'existence des triangles d'inflexions.

Notons $f(x, y)$ le polynôme définissant K_0 trouvé *supra*. Comme K_0 est lisse, le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point. En particulier, au voisinage d'un point d'inflexion, la tangente n'est pas verticale, donc il existe une fonction lisse g telle que l'on

a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$. On sait alors que

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Pour chercher les points d'inflexions, on cherche les points où g'' s'annule, ce qui donne l'équation «hessienne» suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 0$$

qui s'écrit dans le cas présent

$$x^2 + y^2 - 378y^2x^2 + 1372y^2x^3 + 2058y^4x - 4410y^2x^4 + 16170y^4x^2 - 10976x^6y^2 - 16464x^4y^4 - 10976x^2y^6 - 189y^4 + 1274y^6 - 2744y^8 - 189x^4 - 686x^5 + 2646x^6 - 2744x^8 = 0$$

Les inflexions sont donc les solutions du système formé de l'équation hessienne et de $f = 0$. Pour résoudre cela, on peut par exemple utiliser un logiciel de calcul formel.

Nous pouvons ici utiliser une petite astuce (de Daniel PERRIN) pour trouver les points d'inflexions. En effet, ces points semblent se trouver sur le cercle de centre O et de rayon $1/\sqrt{7}$. On cherche donc les solutions du système formé de $f = 0$ et de $x^2 + y^2 - \frac{1}{7} = 0$, ce qui conduit à l'équation $392x^3 - 42x + 1 = 0$, qui s'écrit $x'^3 - 21x' + 7 = 0$, avec $x' = 14x$. Or, si l'on pose $\zeta = e^{2i\pi/7}$ et $u = \zeta + \zeta^{-1}$, on vérifie que l'on a $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$. Cette dernière équation s'écrit encore $\xi^3 - 21\xi + 7 = 0$, avec $\xi = -3(u + \frac{1}{3})$.

On en déduit les coordonnées des sommets d'un des triangles d'inflexions :

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(-\frac{1}{14} (1 + 3(\zeta + \zeta^{-1})), \frac{\sqrt{3}}{14} (\zeta^3 + \zeta^{-3} - \zeta^2 - \zeta^{-2}) \right) \\ b_0 &= \left(-\frac{1}{14} (1 + 3(\zeta^3 + \zeta^{-3})), \frac{\sqrt{3}}{14} (\zeta^2 + \zeta^{-2} - \zeta - \zeta^{-1}) \right) \\ c_0 &= \left(-\frac{1}{14} (1 + 3(\zeta^2 + \zeta^{-2})), \frac{\sqrt{3}}{14} (\zeta + \zeta^{-1} - \zeta^3 - \zeta^{-3}) \right) \end{aligned}$$

On trouve l'autre triangle d'inflexion par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Nous allons maintenant nous placer dans un cadre projectif complexe pour étudier la quartique de KLEIN.

1.2 Étude de la courbe dans le plan projectif complexe

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les triangles d'inflexions pour trouver une équation agréable de la quartique. Nous étudierons également le groupe d'automorphismes de cette courbe, et là encore, bitangentes et points d'inflexion auront toute leur importance : sur ces derniers agissent les automorphismes de la courbe, et nous verrons qu'ils forment des orbites remarquables tant pour la géométrie de la courbe que pour l'action des automorphismes.

1.2.1 Utilisation des triangles d'inflexion

Regardons la courbe (toujours notée K_0) d'équation $f(x, y) = 0$, vue maintenant comme partie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Grâce à une homographie, nous allons envoyer le triangle d'inflexion $a_0b_0c_0$ sur le triangle abc , où $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 1 : 0)$ et $c = (0 : 0 : 1)$. Les homographies agissant transitivement sur les repères projectifs, cela est possible, et nous pouvons même envoyer l'origine O sur le point $d = (1 : 1 : 1)$. Les nouvelles coordonnées seront notées $(X : Y : T)$.

La rotation de centre O qui permute a_0, b_0 et c_0 devient l'homographie σ qui fixe d et qui permute a, b et c , c'est-à-dire $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La nouvelle équation de la quartique peut se calculer, puisque nous connaissons l'ancienne équation et la matrice de passage que nous noterons A . Voici les calculs effectués sous MAPLE :

```
> alias(z,RootOf(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)):
> alias(sqrt3,RootOf(X^2-3)):
> f:=49*(2*x+1)*(-x+sqrt3*y+1)*(-x-sqrt3*y+1)-3*(7*(x^2+y^2)-4)^2:
> A:=<<-1/14*(1+3*(z+z^6)),sqrt3/14*(z^3+z^4-z^2-z^5),1>|<-1/14*(1+3*(z^3+z^4)),sqrt3/14*(z^2+z^5-z-z^6),1>|<-1/14*(1+3*(z^2+z^5)),sqrt3/14*(z+z^6-z^3-z^4),1>>:
> f_homo:=homogeneous(f,x,y,t):
> v:=A.<X,Y,T>:
> eq:=expand(subs({x=v[1],y=v[2],t=v[3]},f_homo));
```

$$eq := 27(X^3Y + Y^3T + T^3X)$$

Ainsi, l'équation de la quartique de KLEIN K est $F(X, Y, T) = 0$, avec $F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X$.

Nous aurions cependant pu nous épargner les calculs, car l'existence du triangle d'inflexion abc et la stabilité par σ sont des conditions fortes, comme le montre la proposition qui suit.

Proposition 1 *Soient $\mathcal{Q} = V(\mathcal{F})$ une quartique irréductible de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et σ la permutation $X \mapsto Y \mapsto T$. On suppose que les points $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 1 : 0)$ et $c = (0 : 0 : 1)$ forment un triangle d'inflexion de \mathcal{Q} , et que \mathcal{F} est stable par σ . Alors il existe une constante κ telle que*

$$\mathcal{F}(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X + \kappa XYT(X + Y + T)$$

Démonstration : L'appartenance de c à la quartique \mathcal{Q} se traduit par l'absence de terme en T^4 . Cherchons la tangente en c ; il suffit pour cela de se placer dans le plan affine $T = 1$. La tangente est alors donnée par les termes en X^1 et Y^1 . Or, cette tangente est par hypothèse la droite (bc) , qui a pour équation $X = 0$. Cela implique qu'il n'y a pas de

terme en YT^3 dans \mathcal{F} . Dire que c est un point d'inflexion entraîne enfin que la multiplicité d'intersection de \mathcal{F} et de (bc) et c est au moins 3. Il n'y a donc pas de terme en Y^2T^2 . Les mêmes arguments avec a et b impliquent que \mathcal{F} s'écrit

$$\mathcal{F}(X, Y, T) = \alpha X^3Y + \beta Y^3T + \gamma T^3X + XYT(\lambda X + \mu Y + \nu T)$$

Enfin, la stabilité par σ se traduit par $\alpha = \beta = \gamma$ d'une part, et $\lambda = \mu = \nu$ d'autre part. La courbe d'équation $XYT(X + Y + T)$ n'étant pas irréductible, on a $\alpha \neq 0$, et le résultat annoncé s'ensuit. \square

Cette proposition est en accord avec le calcul mené sous MAPLE et présenté *supra*, si l'on a $\kappa = 0$. Nous allons voir en quoi la nullité de cette constante est intéressante. Supposons donc pour l'instant que K est la quartique d'équation $F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X + \kappa XYT(X + Y + T)$. Notons G le groupe d'automorphismes de K , c'est-à-dire le groupe des homographies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui conservent K . Puisque $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \simeq \text{PSL}_3(\mathbb{C})$ (cela provient de l'existence de racines cubiques dans \mathbb{C}), nous pourrions choisir, pour représentants des homographies de G , des matrices de déterminant 1.

Soit I l'ensemble des inflexions de K . La multiplicité d'intersection étant conservée par homographies, le groupe G agit sur I . Nous allons commencer par compter le nombre d'inflexions de K avant d'étudier le stabilisateur d'une inflexion, par exemple a .

Un outil pratique pour calculer les inflexions est la *courbe hessienne*, qui est la courbe algébrique définie par le polynôme $H(X, Y, T) = \begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XT} \\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YT} \\ F''_{TX} & F''_{TY} & F''_{T^2} \end{vmatrix}$.

Proposition 2 *Soit $\mathcal{C} = V(F)$ une courbe algébrique lisse de degré n . L'intersection de \mathcal{C} et de sa courbe hessienne est constituée des points d'inflexion de \mathcal{C} . En outre, H est un polynôme homogène de degré $3(n-2)$, de sorte que \mathcal{C} possède $3n(n-2)$ points d'inflexion comptés avec multiplicité. Une quartique a donc 24 points d'inflexion.*

Démonstration : Des opérations élémentaires sur le déterminant et l'utilisation de la formule d'EULER permettent de montrer aisément que $H(X, Y, T) = 0$ si, et seulement si, $F''_{X^2}(F'_Y)^2 - 2F''_{XY}F'_XF'_Y + F''_{Y^2}(F'_X)^2$, qui est la relation trouvée au paragraphe 1.1.2. Quant à la fin de la proposition, elle est conséquence du théorème de BEZOUT. \square

Proposition 3 1. *Si $\kappa \neq 0$, le stabilisateur de a est réduit à l'élément neutre.*

2. *Si $\kappa = 0$, le stabilisateur de a est le groupe d'ordre 7 engendré par l'homographie*

induite par la matrice $\rho = \begin{pmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$, où ζ est une racine primitive septième de l'unité, par exemple $\zeta = e^{2i\pi/7}$.

Démonstration : Soit $g \in \text{Stab}_G(a)$, il transforme la tangente T à K en a en la tangente à $g(K) = K$ en $g(a) = a$, donc $g(T) = T$. Comme T recoupe K en b (intersection simple), on

a nécessairement $g(b) = b$, et de même $g(c) = c$. Du point de vue des matrices, cela signifie qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}^*$ tels que g soit induite par la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$. Vu la remarque faite *supra*, on peut supposer $\lambda\mu\nu = 1$. Dire que g conserve K signifie que $F(\lambda X, \mu Y, \nu T)$ est proportionnel à $F(X, Y, T)$.

1. Si $\kappa \neq 0$, cela implique $\lambda^3\mu = \mu^3\nu = \nu^3\lambda = \lambda^2\mu\nu = \lambda\mu^2\nu = \lambda\mu\nu^2$, ce qui entraîne $\lambda = \mu = \nu$, c'est-à-dire $g = \text{id}$.
2. Si $\kappa = 0$, il vient seulement $\lambda^3\mu = \mu^3\nu = \nu^3\lambda$. Posant alors $k = \frac{\lambda}{\mu}$ et $\ell = \frac{\mu}{\nu}$, on obtient $\ell^2 = k$ et $\ell^7 = 1$. Si g n'est pas l'identité, ℓ est donc une racine primitive septième de l'unité, disons $\zeta = e^{2i\pi/7}$, et le résultat suit aisément.

□

Corollaire 4 1. Si $\kappa \neq 0$, G possède au plus 24 éléments.

2. Si $\kappa = 0$, G possède au plus 168 éléments.

Démonstration : On a vu que K possède 24 inflexions, donc l'orbite $\omega(a)$ de a sous l'action de G est de cardinal au plus 24 (rappelons que l'image d'une inflexion est une inflexion). Par ailleurs, $\text{Stab}(a)$ est de cardinal 7 ou 1, suivant que A est nul ou non. Le corollaire découle alors de la formule $|G| = |\omega(a)| \times |\text{Stab}(a)|$. □

Remarquons que le groupe d'automorphismes est aussi gros que possible lorsque son action sur les inflexions est transitive, que κ soit nul ou pas. À partir de maintenant, nous allons étudier la quartique ayant potentiellement le plus d'automorphismes possibles, c'est-à-dire celle qui correspond à $\kappa = 0$: c'est la «vraie» quartique de KLEIN.

1.2.2 Les automorphismes de K

Le résultat essentiel de ce paragraphe est que le groupe G est le groupe simple d'ordre 168. On sait en effet qu'il n'y a qu'un seul groupe simple d'ordre 168 (voir par exemple [Pe2], p.115), qui n'est autre que $\text{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ ou encore $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Ce sont les inflexions et les bitangentes qui vont nous aider à révéler la structure de G .

Nous avons déjà exhibé deux automorphismes de K : la permutation σ , d'ordre 3, et l'homographie ρ , d'ordre 7. La courbe réelle admettait encore des automorphismes d'ordre 2, par exemple les symétries par rapport aux hauteurs du triangle formé par les bitangentes. Nous pouvons ainsi, grâce au changement de repère précédent, trouver des involutions dans G . Les calculs étant fastidieux, on peut les mener sous MAPLE (ici, τ désigne la symétrie par rapport à la droite passant par $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$) :

```
> A:=<<-1/14*(1+3*(z+z^6)),sqrt3/14*(z^3+z^4-z^2-z^5),1>|<-1/14*(1+3*
(z^3+z^4)),sqrt3/14*(z^2+z^5-> z-z^6),1>|<-1/14*(1+3*(z^2+z^5)),sqrt3/14*
(z+z^6-z^3-z^4),1>>:
> t:=<<-1/2,sqrt3/2,0>|<sqrt3/2,1/2,0>|<0,0,1>>:
> tau:=simplify(A^(-1).t.A);
```

$$\tau := \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^{-1} & \zeta^2 - \zeta^{-2} & \zeta^4 - \zeta^{-4} \\ \zeta^2 - \zeta^{-2} & \zeta^4 - \zeta^{-4} & \zeta - \zeta^{-1} \\ \zeta^4 - \zeta^{-4} & \zeta - \zeta^{-1} & \zeta^2 - \zeta^{-2} \end{pmatrix}$$

Nous allons à présent encore une fois utiliser l'action de G sur l'ensemble I des inflexions pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 5 *Le groupe G a 168 éléments.*

Démonstration : Vu la remarque faite précédemment, il suffit de montrer que G opère transitivement sur I . Soient $I' = I \setminus \{a, b, c\}$ et H le sous-groupe de G engendré par ρ et σ . On vérifie que $\tau(a) \in I'$, de sorte qu'il suffit de montrer que H agit transitivement sur I' .

On montre aisément que $H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; en particulier, H est de cardinal 21. Comme ρ n'a pas de point fixe dans I' , les orbites de $\langle \rho \rangle$ sont de cardinal 7, et sont au nombre de trois. D'autre part, σ stabilise $\{a, b, c\}$, donc $H' = \langle \sigma \rangle$ agit sur I' , et cette action est sans point fixe dans I' . Donc H' ne stabilise aucune orbite de cardinal 7 (si ω est une telle orbite, on a une action de H' sur ω , et la formule de BURNSIDE dit que le nombre d'orbites est $|\omega|/|H'| = 7/3$, absurde). De tout cela découle la transitivité de l'action de H sur I' . \square

Corollaire 6 *La quartique de KLEIN admet 28 bitangentes, et ces bitangentes forment une orbite sous G . Le stabilisateur de la bitangente d'équation $X + Y + T = 0$ est le sous-groupe engendré par σ et τ ; il est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .*

Démonstration : Pour commencer, comme la multiplicité d'intersection et la tangence sont conservées, le groupe G agit effectivement sur les bitangentes. On vérifie que la droite $X + Y + T = 0$ est bien bitangente à K (en les points $(1 : j : j^2)$ et $(1 : j^2 : j)$). On renvoie à l'annexe 3 de [Pe1] pour la preuve que son stabilisateur est bien $\langle \sigma, \tau \rangle$. L'orbite de cette bitangente est donc de cardinal $168/6 = 28$. Il reste donc à montrer que la quartique de KLEIN possède effectivement 28 bitangentes. Cela résulte d'une des formules de PLÜCKER, qu'on trouvera en Annexe 1. Ladite formule dit que le nombre b de bitangentes est relié à la classe n^* de la quartique (c'est-à-dire le nombre maximal de tangentes qu'on peut y mener depuis un point extérieur), à son degré n et au nombre i de points d'inflexions par la relation $n = n^*(n^* - 1) - 2b - 3i$. Ici, $n = 4$, $n^* = 12$ et $i = 24$, et le résultat annoncé s'ensuit. \square

Comme nous l'avons annoncé, le groupe G possède une propriété remarquable :

Théorème 7 *Le groupe G est simple.*

Démonstration : On trouvera la preuve de ce théorème dans [Pe1], section 2.3.4. Essentiellement, il s'agit d'étudier les éléments de G suivant leur ordre, via leur action sur les inflexions et les bitangentes. \square

Nous savons qu'il n'existe qu'un seul groupe simple d'ordre 168 à isomorphisme près, et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ en sont des réalisations. Dans le cas présent, nous pouvons

exhiber des isomorphismes entre G et $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ (ou $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, qui lui est égal) d'une part, et entre G et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ d'autre part.

1.2.3 Isomorphisme entre G et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$

Le groupe G se relève en un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, encore noté G , engendré par les matrices τ, σ, ρ . Ces matrices sont à coefficients complexes ; plus précisément, elles sont à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]_{2\alpha+1}$, localisé de $\mathbb{Z}[\zeta]$ en $2\alpha+1$, où $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, de sorte que $2\alpha+1 = i\sqrt{7}$.

Lemme 8 *Le quotient de $\mathbb{Z}[\zeta]_{2\alpha+1}$ par l'idéal $(2, \zeta^3 + \zeta + 1)$ est isomorphe au corps à huit éléments \mathbb{F}_8 .*

Démonstration : Remarquons que sur \mathbb{F}_2 , on a la décomposition en facteurs irréductibles suivante : $X^6 + X^5 + \dots + 1 = (X^3 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1)$. Notons encore ζ une racine de $X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$, on a donc $\zeta \in \mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$, d'où le morphisme surjectif $X \in \mathbb{Z}[X] \mapsto \zeta \in \mathbb{F}_8$. Le noyau de ce morphisme contient l'idéal $(X^6 + X^5 + \dots + 1)$, et comme $\mathbb{Z}[\zeta] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^6 + X^5 + \dots + 1)$, on en déduit un morphisme surjectif $u : \mathbb{Z}[\zeta] \rightarrow \mathbb{F}_8$. Maintenant, on a $u(2\alpha+1) = 1$, ce qui entraîne l'existence d'un morphisme $\bar{u} : \mathbb{Z}[\zeta]_{2\alpha+1} \rightarrow \mathbb{F}_8$. Reste encore à vérifier que $\ker \bar{u} = (2, \zeta^3 + \zeta + 1)$, ce qui ne pose aucun problème. \square

Regardons le morphisme de réduction $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[\zeta]_{2\alpha+1}) \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_8)$. Comme G est simple, il est isomorphe à son image, qu'on notera encore G . Les éléments σ, ρ sont envoyés sur des éléments (toujours notés σ et ρ) qui ont la même écriture ; en revanche, compte tenu de la caractéristique 2 et de l'égalité $\zeta^3 + \zeta + 1 = 0$, l'image de τ (encore notée τ) s'écrit

$$\tau = \begin{pmatrix} \zeta^{-2} & \zeta^3 & \zeta^{-1} \\ \zeta^3 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} \\ \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \zeta^3 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant exhiber l'isomorphisme entre G et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$:

Théorème 9 *Il existe $p \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_8)$ telle que la conjugaison $g \mapsto p g p^{-1}$ soit un isomorphisme de G sur $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.*

Démonstration : Pour des raisons de cardinalité, et puisque G est engendré par ρ, σ et τ , il suffit de trouver p telle que $p\rho p^{-1}, p\sigma p^{-1}$ et $p\tau p^{-1}$ soient dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Comme $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est déjà dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, on cherche p qui commute à σ .

Cela revient à chercher p sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour déterminant $a^3 + b^3 + c^3 + abc$, qui vaut 1 dès lors que $\{a, b, c\} = \{\zeta^{-1}, \zeta^{-2}, \zeta^3\}$. Ensuite, on cherche p

de sorte que les matrices $p\rho p^{-1}$ et $p\tau p^{-1}$ soient invariantes par le FROBENIUS $t \mapsto t^2$. Les calculs mènent alors à $p = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^3 & \zeta^{-2} \\ \zeta^{-2} & \zeta^{-1} & \zeta^3 \\ \zeta^3 & \zeta^{-2} & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, et on vérifie que $p\rho p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $p\tau p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

1.2.4 Isomorphisme entre G et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$

L'action par conjugaison de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ sur son algèbre de LIE $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}_7)$ donne une représentation de degré 3 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, et comme ce dernier est un groupe simple, il s'agit d'une représentation fidèle. On a donc un morphisme injectif $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_7)$ qui permet d'identifier $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_7)$.

Soient d'une part les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et d'autre part les matrices $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui forment une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}_7)$. Pour décrire la représentation précédente, calculons les matrices Φ_S et Φ_T de $\varphi(S)$ et $\varphi(T)$ (respectivement) dans la base (e, h, f) :

$$\Phi_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque S et T engendrent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, les matrices Φ_S et Φ_T engendrent $\varphi(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7))$.

Nous allons maintenant trouver un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et G . Dans le but de réduire modulo 7 les matrices ρ et τ , on montre par le calcul qu'il existe une matrice p telle que les coefficients de $p\rho p^{-1}$ et $p\tau p^{-1}$ n'aient pas de 7 aux dénominateurs. On réduit ensuite, compte tenu de l'égalité $\mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta - 1) = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_7, X - 1) = \mathbb{Z}[X]/(7, X - 1) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Voici les commandes MAPLE correspondant à cela :

```
> alias(z,RootOf(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)):
> alias(sqrt3,RootOf(X^2-3)):
> sqrt7:=2*z^4+2*z^2+2*z+1:
> A:=<<-1/14*(1+3*(z+z^6)),sqrt3/14*(z^3+z^4-z^2-z^5),1>|<-1/14*(1+3*(z^3+z^4)),sqrt3/14*(z^2+z^5-z-z^6),1>|<-1/14*(1+3*(z^2+z^5)),sqrt3/14*(z+z^6-z^3-z^4),1>>:
> p:=DiagonalMatrix([1,sqrt3,1/sqrt7]).A:
> rho_red:=map(e->e mod 7,subs(z=1,p.rho.p^(-1)));
> tau_red:=map(e->e mod 7,subs(z=1,p.tau.p^(-1)));
```

On a donc deux matrices ρ_{red} et τ_{red} à coefficients dans \mathbb{F}_7 . Maintenant, le calcul prouve

l'existence d'une matrice q telle que $q\Phi_S q^{-1} = \tau_{red}$ et $q\Phi_T q^{-1} = \rho_{red}$. D'ailleurs, on a

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_7)$ engendré par ρ_{red} et τ_{red} est isomorphe à celui engendré par Φ_S et Φ_T , dont on a vu qu'il était isomorphe à $PSL_2(\mathbb{F}_7)$. Enfin, comme ρ et τ engendrent G , le sous-groupe engendré par ρ_{red} et τ_{red} est également isomorphe à G . Tout cela montre que G et $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ sont isomorphes. \square

1.2.5 Pourquoi la quartique de Klein est-elle exceptionnelle ?

L'existence de 168 automorphismes pour la quartique de KLEIN est en fait exceptionnelle. En effet, cette quartique est une courbe projective complexe, donc également une surface (réelle), et possède donc un genre. Or, un théorème de HURWITZ dit qu'une courbe algébrique lisse de genre g possède au plus $84(g-1)$ automorphismes.

On trouvera en Annexe 2 la démonstration du fait que pour une courbe algébrique lisse, degré n et genre g sont reliés par la formule $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. La quartique de KLEIN est donc de genre 3, et la borne de HURWITZ est atteinte ! C'est donc une courbe exceptionnellement symétrique ; d'ailleurs, c'est la seule courbe de genre 3 qui possède 168 automorphismes (cf [Br]).

La quartique de KLEIN est en fait une surface de RIEMANN compacte. Or, un théorème (dit «d'uniformisation») dû à KOEBE et POINCARÉ affirme que toute surface de RIEMANN est isomorphe à $\widehat{\mathbb{C}}$ (genre 0), à \mathbb{C}/Λ (genre 1) ou à un quotient du demi-plan de POINCARÉ \mathfrak{H} par un groupe d'automorphismes sans point fixe (genre > 1).

La suite de ce texte consiste à trouver deux uniformisations relativement explicites de la surface de KLEIN. Son genre étant 3, on travaillera sur le plan hyperbolique. La première uniformisation prend pour modèle de plan hyperbolique le disque de POINCARÉ \mathbb{D} , tandis que pour la deuxième, le modèle utilisé est le demi-plan de POINCARÉ \mathfrak{H} .

2 Recollement de triangles hyperboliques

2.1 Principe général

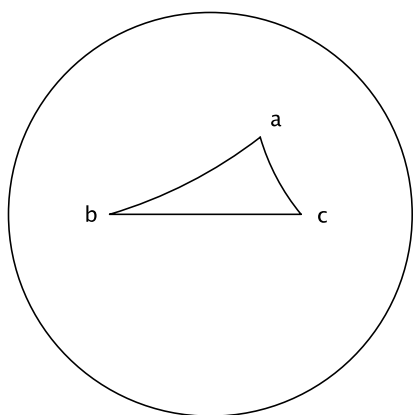
Si l'on se donne un ensemble X sur lequel agit un groupe Γ , on appelle *domaine fondamental* de Γ un sous-ensemble D de X satisfaisant $X = \bigcup_{g \in \Gamma} g(D)$, avec en outre $g(D)$ et $g'(D)$ d'intérieurs disjoints dès que $g \neq g'$ (on peut aussi demander $g(D)$ et $g'(D)$ disjoints pour $g \neq g'$). On dit aussi que $(g(D))_{g \in \Gamma}$ est un pavage de X . Si de plus Λ est un sous-groupe distingué de Γ , un domaine fondamental de Λ est donné par $D' = \bigcup g(D)$,

la réunion portant sur un système de représentants de Γ/Λ (D' dépend donc du choix des représentants). On a par ailleurs une action de Γ/Λ sur X/Λ , qui est alors naturellement muni d'un groupe d'automorphismes, isomorphe à Γ/Λ .

Nous allons essayer de réaliser cette situation dans le cas de la quartique de KLEIN, en cherchant un groupe Λ agissant sur le disque de POINCARÉ \mathbb{D} et tel que le groupe d'automorphismes de \mathbb{D}/Λ soit le groupe simple d'ordre 168. On prendra garde au fait que lorsque nous parlerons d'angles, triangles, isométries, etc., ce sera au sens de la géométrie de POINCARÉ. La référence principale pour cette section est le chapitre 6 de [Do].

2.2 Pavage du disque de Poincaré

Soient n, p et q des entiers positifs tels que $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Alors il existe un triangle $T = abc$ (unique à isométrie près) dans \mathbb{D} ayant pour angles $\hat{a} = \pi/n, \hat{b} = \pi/p$ et $\hat{c} = \pi/q$.



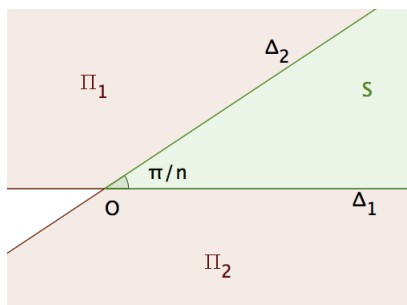
Soient $\sigma_{a,b}, \sigma_{b,c}$ et $\sigma_{c,a}$ les symétries par rapport aux côtés ab, bc et ca , et soit G le sous-groupe du groupe des isométries de \mathbb{D} engendré par $\sigma_{a,b}, \sigma_{b,c}$ et $\sigma_{c,a}$. Nous allons montrer que $(g(T))_{g \in G}$ est un pavage de \mathbb{D} , ce qui est loin d'être trivial.

La stratégie est de construire un espace topologique E sur lequel G agit et pour lequel il est facile de prouver que $((g(T))_{g \in G})$ est un pavage, puis de trouver un homéomorphisme de E sur \mathbb{D} . Commençons par un lemme sur le groupe diédral.

2.2.1 Groupe diédral

Dans le plan complexe, soient Δ_1 et Δ_2 deux droites faisant un angle $\frac{\pi}{n}$, Π_1 et Π_2 deux demi-plans fermés délimités par Δ_1 et Δ_2 tels que Π_2 soit l'image de Π_1 par la rotation d'angle $\pi + \frac{\pi}{n}$, et soient finalement $S = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $\Delta_1^+ = S \cap \Delta_1$ et $\Delta_2^+ = S \cap \Delta_2$.

On note u et v les symétries par rapport à Δ_1 et Δ_2 respectivement, et G le sous-groupe des isométries du plan engendré par u et v .



Lemme 10 1. Le groupe G possède $2n$ éléments. C'est, par définition, le groupe diédral d'ordre $2n$.

2. Le secteur S est un domaine fondamental de G .

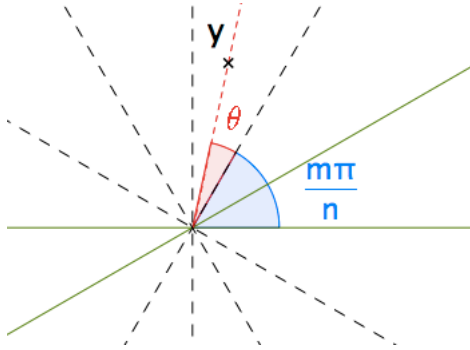
3. Soient $g, g' \in G$ et $x, x' \in S$. Alors

$$(a) \quad g(x) = g'(x') \Rightarrow x = x'$$

$$(b) \quad g(x) = g'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g' = g & \text{si } x \in \overset{\circ}{S} \\ g' \in \{g, gu\} & \text{si } x \in \Delta_1^+ \setminus \{0\} \\ g' \in \{g, gv\} & \text{si } x \in \Delta_2^+ \setminus \{0\} \end{cases}$$

Démonstration : On peut supposer que $\Delta_1 = \mathbb{R}$ et $\Delta_2 = e^{i\pi/n}\mathbb{R}$, de sorte que $v \circ u$ soit la rotation de centre 0 et d'angle $2\pi/n$. Alors $(vu)^n = \text{id}$, et de cela suit que tout élément de G s'écrit $(vu)^k$ ou $(vu)^k v$ avec $0 \leq k \leq n-1$ (en particulier, cela montre que $|G| \leq 2n$).

Si $x = \rho e^{i\theta}$, on a $(vu)^k(x) = \rho e^{i\theta'}$ avec $\theta' = \frac{2k\pi}{n} + \theta$, et $(vu)^k v(x) = \rho e^{i\theta'}$ avec $\theta' = \frac{2(k+1)\pi}{n} - \theta$. Soit maintenant $y \in \mathbb{C}^*$ et montrons qu'il existe $g \in G$ et $x \in S$ tels que $y = g(x)$.



En effet, $y = \rho e^{i\theta'}$ où $\theta' = \frac{m\pi}{n} + \theta$, avec $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\theta \in [0, \pi/n]$. Si y n'est pas sur un des «rayons», le couple (m, θ) est unique. On prend alors $(g, x) = ((vu)^k, \rho e^{i\theta})$ si $m = 2k$, ou $(g, x) = ((vu)^k v, \rho e^{i\theta})$ si $m = 2k+1$. Si y est sur un rayon, on a soit $\theta' = \frac{2k\pi}{n}$, soit $\theta' = \frac{2(k+1)\pi}{n}$. Dans le premier cas, on prend $x = \rho$ et $g \in \{(vu)^k, (vu)^{k-1}v\}$. Dans le deuxième cas, on prend $x = \rho e^{i\pi/n}$ et $g \in \{(vu)^k, (vu)^{k-1}v\}$. À noter qu'à chaque fois, il n'y a pas d'autre choix possible pour g .

Ainsi, si $g(x) = g'(x') \stackrel{\text{déf.}}{=} y = \rho e^{i\theta'}$ n'est pas sur un rayon, il vient immédiatement $x = x' = \rho e^{i\theta}$; si oui $x = x' = \rho$ ou $x = x' = \rho e^{i\pi/n}$. Enfin, si $g(x) = g'(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} y$ n'est pas sur un rayon, on a $g = g'$ vu *supra*; si c'est le cas, $g = g'$ modulo v . Cela achève la démonstration. \square

2.2.2 Notations et énoncé du théorème

Soient $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ l'ensemble des isométries de \mathbb{D} et $L = L(U, V, W)$ le groupe libre sur trois générateurs. On définit un morphisme $\psi : L \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{D})$ par $\psi(U) = \sigma_{b,c}$, $\psi(V) = \sigma_{c,a}$ et $\psi(W) = \sigma_{a,b}$. Soit N le sous-groupe distingué de L engendré par $U^2, V^2, W^2, (UV)^q, (VW)^n$ et $(WU)^p$. Comme $\sigma_{b,c}^2 = \dots = \text{id}$, il existe un morphisme φ rendant le diagramme

suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{S}(\mathbb{D}) \\ \chi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ G & & \end{array}$$

où G désigne le quotient L/N et χ la surjection canonique. Ainsi, G agit sur \mathbb{D} par isométries. Notons encore $u = \chi(U)$, $v = \chi(V)$ et $w = \chi(W)$.

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 11 *La famille $(g.T)_{g \in G}$ est un pavage de \mathbb{D} .*

Comme annoncé, nous allons construire un espace topologique E contenant T , sur lequel G agit, et dont on montrera que $(g.T)_{g \in G}$ est un pavage. Il faut également construire un homéomorphisme de E sur \mathbb{D} compatible avec l'action de G .

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes :

- $(g, x) \sim (gu, x)$ si $x \in [b, c]$
- $(g, x) \sim (gv, x)$ si $x \in [c, a]$
- $(g, x) \sim (gw, x)$ si $x \in [a, b]$

Cela permet de définir l'ensemble dont nous avons parlé, à savoir $E = (G \times T)/\mathcal{R}$. L'application $(g, x) \in G \times T \mapsto g.x \in \mathbb{D}$ se factorise alors en $\pi : E \rightarrow \mathbb{D}$.

L'action de G sur $G \times T$ donne une opération de G sur E , et l'application π est compatible avec les actions de G sur E et sur \mathbb{D} .

On note de plus $G_a = \langle v, w \rangle$, $G_b = \langle w, u \rangle$, $G_c = \langle u, v \rangle$, $G_x = \{e, w\}$ (resp. $\{e, u\}$, $\{e, v\}$) si $x \in]a, b[$ (resp. $]b, c[$, $]c, a[$) et $G_x = \{e\}$ si $x \in \overset{\circ}{T}$. On remarquera que si $(g, x)\mathcal{R}(g', x')$, alors $x = x'$, et que l'on a $(g, x)\mathcal{R}(g', x)$ si, et seulement si, $g' \in g.G_x$. Cela montre que l'application $x \in T \mapsto \chi(e, x) \in E$ est injective.

Enfin, pour $x \in T$, on note $E_x = \chi(G_x \times T)$ (c'est l'étoile de x dans E) et $E'_x = \chi(G_x \times T_x)$ où T_x désigne T privé des côtés contenant x . E'_x est appelé étoile ouverte de x ; c'est un ouvert de E .

2.2.3 Démonstration du théorème

Lemme 12 *π induit un homéomorphisme de E_a sur un voisinage de a dans \mathbb{D} .*

Démonstration : Pour commencer, on peut supposer $a = 0$. Ainsi, les côtés ab et ac sont portés par des droites euclidiennes Δ_1 et Δ_2 , et on se retrouve dans la situation «diédrale», de sorte que G_a est isomorphe au groupe diédral à $2n$ éléments. Le triangle T est un voisinage de a dans le secteur S situé «entre» les droites Δ_1 et Δ_2 .

Montrons que $\pi|_{E_a}$ est injective : si $(g, x), (g', x') \in E_a$ ont même image par π , c'est que $g.x = g'.x'$. Puisque nous avons ramené la situation au groupe diédral, le lemme 10 montre que $x = x'$ et que g et g' sont égaux modulo G_x .

Ainsi, l'application $\pi|_{E_a} : E_a \rightarrow \pi(E_a)$ est une bijection continue, et $\pi(E_a) = \bigcup_{g \in G_a} g.T$ est un voisinage de $\pi(a)$ dans E . De plus, $G_a \times T$ est compact, donc E_a est quasi-compact. Comme de plus \mathbb{D} est séparé, $\pi|_{E_a}$ est un homéomorphisme sur son image. \square

Lemme 13 $\pi : E \rightarrow \mathbb{D}$ est étale (autrement dit, c'est un difféomorphisme local).

Démonstration : Sur $\overset{\circ}{T}$, π est l'identité donc est étale. Soit $x \in]a, b[$, alors $\pi|_{E_x}$ est injective : $T \setminus [a, b]$ et $\sigma_{a,b}(T \setminus [a, b])$ sont disjoints donc si $g\xi = g'\xi'$ avec $g, g' \in G_x = \{e, w\}$, on a $\xi = \xi'$ et si $g' = gw$, alors $g'\xi \in g(\sigma_{a,b}(T \setminus [a, b]))$ et $g\xi \in T \setminus [a, b]$, absurde.

Le triangle T est un voisinage de x dans le demi-disque fermé délimité par $[a, b]$, donc $\pi(E_x) = T \cup \sigma_{a,b}(T)$ est un voisinage de x dans \mathbb{D} . Puisque \mathbb{D} est séparé et E_x quasi-compact, $\pi|_{E_x}$ est un homéomorphisme sur son image. De cela et du lemme 12 découle que π est étale partout sur T .

Soit maintenant $\chi(g, x) \in E$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \chi(e, x) \in T \subset E & \xrightarrow{t \mapsto g.t} & \chi(g, x) \in E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in \mathbb{D} & \xrightarrow{g} & gx \in \mathbb{D} \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des homéomorphismes, et cela permet de voir que π est étale en $\chi(g, x)$. \square

Lemme 14 Il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $t \in E$, il existe une section continue s de E définie sur $B_P(\pi(t), r)$ vérifiant $s(\pi(t)) = t$ (B_P désigne une boule pour la métrique de POINCARÉ).

Démonstration : Pour $t \in T$, soit $R(t)$ la borne supérieure des $r \geq 0$ tels qu'il existe une section continue s de E définie sur $B_P(t, r)$ avec $s(t') = t'$ pour tout $t' \in B_P(t, r) \cap T$. π est étale donc $R(t) > 0$ pour tout t .

De plus, pour $t' \in B_P(t, r)$, on a $B_P(t', r - d(t, t')) \subset B_P(t, r)$ (où d désigne la distance de POINCARÉ), ce qui montre que $R(t') \geq R(t) - d(t, t')$, et donc que l'application R est constante égale à $+\infty$ ou est 1-lipschitzienne. En tout cas, R est continue, et comme T est compact, elle admet un minimum $R_0 > 0$. Soit alors $r \in]0, R_0[$: pour tout $t \in T$, il existe une section continue s de E définie sur $B_P(t, r) = B_P(\pi(t), r)$ avec $s(\pi(t)) = t$.

Si maintenant $t \in E$, il existe $g \in G$ et $t_0 \in T$ tels que $t = g.t_0$. Vu ce qui précède, il existe s_0 section continue définie sur $B_P(t_0, r)$ avec $s_0(t_0) = t_0$. Alors $s : x \mapsto g.s_0(g^{-1}.x)$ est une section continue de E définie sur $B_P(\pi(t), r)$ et vérifiant $s(\pi(t)) = t$. \square

Nous omettons la démonstration du lemme technique suivant :

Lemme 15 Soient B un espace métrique, E un espace séparé et étalé au-dessus de B . On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in E$, il existe une section continue s de E définie sur $B(\pi(t), r)$, et que l'intersection de deux boules de B est connexe. Alors E est un revêtement de B .

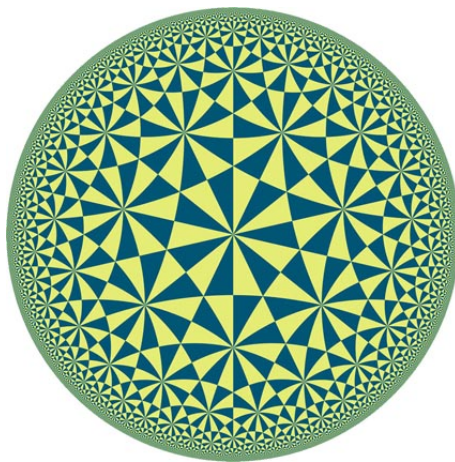
Lemme 16 L'espace E est séparé et connexe.

Démonstration : Commençons par montrer que E est séparé. La projection $G \times T \rightarrow T$ est compatible avec la relation \mathcal{R} , ce qui donne une application continue $q : \chi(g, t) \in E \mapsto t \in T$. Ainsi, pour $t \neq t'$, les éléments distincts $\chi(g, t)$ et $\chi(g', t')$ peuvent être séparés (t et t' peuvent être séparés dans T , et par continuité de q , on sépare $\chi(g, t)$ et $\chi(g', t')$). Et si on a $\chi(g, t) \neq \chi(g', t)$, on vérifie que les ouverts $g.E'_t$ et $g'.E'_t$ séparent ces points.

Montrons maintenant que E est connexe : soit A un sous-ensemble de E à la fois ouvert et fermé. Quel que soit g , l'image du connexe $\{g\} \times T$ est contenue soit dans A , soit dans $E \setminus A$. Définissons $M = \{g \in G \mid \chi(\{g\} \times T) \subset A\}$. Si $g \in M$, alors $gu \in M$ également car $\chi(\{gu\} \times T)$ est inclus dans A ou dans $E \setminus A$ et $\chi(gu, x) = \chi(g, x) \in A$ pour $x \in [b, c]$. En outre, $gu^{-1} \in M$ car $u = u^{-1}$. De même, on a gv, gv^{-1}, gw et $gw^{-1} \in M$. Mais G est engendré par u, v et w , et cela montre que $M = G$ ou $M = \emptyset$, c'est-à-dire que $A = E$ ou $A = \emptyset$. \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème annoncé plus haut : dans \mathbb{D} , muni de la distance de POINCARÉ, les intersections de deux boules sont connexes, donc, en vertu du lemme 14, les hypothèses du lemme 15 sont satisfaites. Par conséquent, l'application $\pi : E \rightarrow \mathbb{D}$ est un revêtement. Or, \mathbb{D} est simplement connexe, donc il s'agit d'un revêtement trivial, et comme E est connexe (lemme 16), c'est un revêtement de degré 1. Cela montre que π est un homéomorphisme.

Enfin, il est clair que $E = \bigcup_{g \in G} g.T$ avec les $g.T$ d'intérieurs disjoints, et puisque π est compatible avec l'action de G , on a $\mathbb{D} = \bigcup_{g \in G} g.\pi(T) = \bigcup_{g \in G} g.T$, donc $(g.T)$ est un pavage de \mathbb{D} . \square

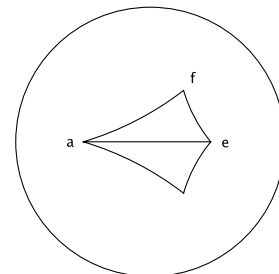


2.2.4 Retour à notre problème

Désormais, on choisit les valeurs suivantes : $n = 7$, $p = 3$ et $q = 2$. Nous savons donc paver le plan hyperbolique par un triangle, appelons-le aef , d'angles $\hat{a} = \pi/7$, $\hat{e} = \pi/3$ et $\hat{f} = \pi/2$, et nous avons utilisé une groupe d'isométries engendré par les réflexions par rapport aux côtés : ce groupe comporte donc des isométries positives et des isométries

négatives. Or, pour la quartique de KLEIN, nous n'avons considéré que des homographies, et pas d'anti-homographies (c'est-à-dire qu'on a travaillé avec des éléments de $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$, et pas avec des éléments de $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Par conséquent, nous allons utiliser un pavage légèrement différent : au lieu de considérer le triangle $ae f$ et le groupe $\langle \sigma_{a,e}, \sigma_{e,f}, \sigma_{f,a} \rangle$, nous allons considérer la réunion du triangle et de son transformé par la symétrie $\sigma_{a,e}$ et le groupe Γ engendré par les rotations $\rho = \sigma_{f,a}\sigma_{a,e}$, $\sigma' = \sigma_{a,e}\sigma_{e,f}$ et $\tau' = \sigma_{e,f}\sigma_{f,a}$ (d'angles respectifs $2\pi/7$, $2\pi/3$ et π).



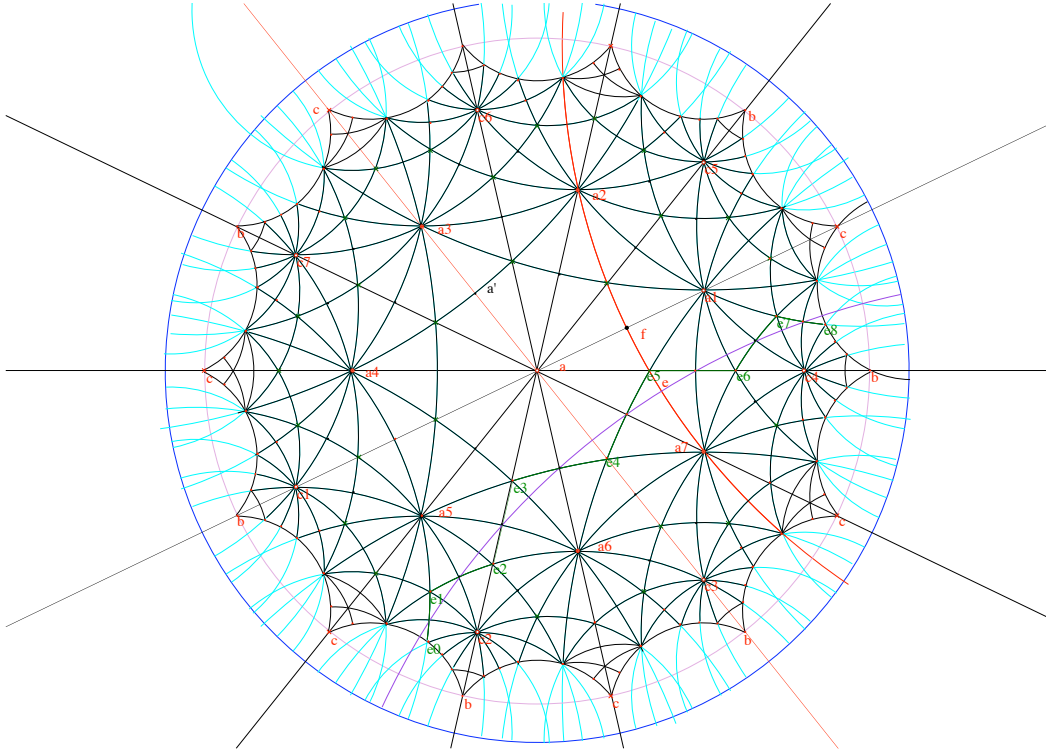
2.3 Le sous-groupe Λ

Rappelons que nous cherchons un sous-groupe Λ de Γ qui soit d'indice 168 et tel que le quotient \mathbb{D}/Λ soit la quartique de KLEIN.

Commençons par remarquer que $\rho\sigma'\tau'$ n'est autre que l'identité, de sorte que Γ est engendré par ρ et τ' , d'ordres respectifs 7 et 2. Or, on a une présentation du groupe G des automorphismes de la quartique $G = \langle R, T; R^7 = T^2 = (TR)^3 = (TR^3)^4 \rangle$ (cf. [C-M], 7.5). Cela nous invite à poser $\gamma = \tau'\rho^3$, puis à définir Λ comme étant le sous-groupe distingué engendré par γ^4 . On a donc la proposition suivante :

Proposition 17 *Le quotient de Γ par Λ est le groupe simple d'ordre 168.*

Un domaine fondamental de Λ est constitué de 168 transformés d'un domaine fondamental de Γ , à savoir le quadrangle décrit précédemment. On obtient ainsi un 14-agone, représenté sur la figure suivante, tirée de [Pe1] :



2.4 Recollement des triangles

Pour comprendre le quotient \mathbb{D}/Λ , il faut commencer par comprendre les règles d'identification de ce quotient. Comme nous avons quotienté par le sous-groupe normal engendré par γ^4 , il faut comprendre l'action de γ^4 et de ses conjugués.

Tout d'abord, l'écriture de τ' et ρ en produit de réflexions permet de voir que $\gamma = \sigma_{e,f}\sigma_{a,a'}$, où a' est l'image de f par ρ^2 (cf. figure). Soit donc la géodésique orthogonale à (aa') et (ef) ; elle coupe le côté contenant e_0 (numérotions-le 1, et continuons la numérotation dans le sens anti-horaire) et celui contenant e_8 , et comme γ^4 envoie un point du bord sur un point du bord (rappelons que le 14-agone est une domaine fondamental pour Λ), ces côtés sont identifiés dans le quotient.

Par ailleurs, Λ contient aussi les conjugués $\delta_i = \rho^i \gamma^4 \rho^{-i}$. Regardons le côté $2i + 1$, il est envoyé sur le côté 1 par ρ^{-i} , lequel est envoyé sur le côté 6 par γ^4 , et ce dernier est envoyé sur le côté $2i + 6$ par ρ^i . Ainsi, on obtient la règle suivante : les côtés $2i + 1$ et $2i + 6$ sont identifiés (par δ_i) pour $i \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$. On a donc identifié tous les côtés deux à deux. On remarquera en outre qu'il ne reste que deux sommets après identification, à savoir b et c .

Concernant les orbites sous l'action de $G = \Gamma/\Lambda$, on voit qu'elles sont toutes de cardinal 168, sauf trois d'entre elles. En effet, les centres des rotations d'ordre 7 sont tous communs à 7 quadrangles, donc forment une orbite de cardinal 24. De même, les centres des rotations d'ordre 3 (resp. 2) forment une orbite de cardinal 56 (resp. 84).

2.5 Reconnaissance de \mathbb{D}/Λ

Il nous reste à voir que le quotient \mathbb{D}/Λ est effectivement la surface de KLEIN. Nous allons voir que les points d'inflexion jouent encore une fois un rôle essentiel.

Lemme 18 *La surface \mathbb{D}/Λ est de genre 3.*

Démonstration : Nous avons identifié deux à deux les côtés d'un 14-agone, et il ne reste que 2 sommets (correspondant à b et c). On trouvera en Annexe 2 la preuve que le genre de \mathbb{D}/Λ est alors $7 - 2 + 1/2 = 3$. \square

Lemme 19 *Le groupe Λ agit sans point fixe.*

Démonstration : Le fait que γ^4 agisse sans point fixe n'est *a priori* pas évident. On trouvera les détails au paragraphe 6.10.13 de [Do]. \square

Théorème 20 *La surface \mathbb{D}/Λ est la quartique de KLEIN.*

Démonstration : Du fait que Λ agit sans point fixe, le quotient $X = \mathbb{D}/\Lambda$ est une surface de RIEMANN, qui est de plus compacte (car le domaine fondamental l'est) et orientée (à cause de la structure complexe). Un théorème (dû à RIEMANN, cf. [Re], chapitre VII) dit alors que c'est une courbe algébrique. Elle est de genre 3, et d'après un théorème de classification (voir encore [Re], chapitre I, §3), soit elle admet un plongement dans \mathbb{P}^2 dont l'image est une quartique lisse, soit elle est de type *hyperelliptique*, c'est-à-dire qu'il existe $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 2. Or, les courbes hyperelliptiques admettent un automorphisme involutif (appelé «involutions hyperelliptique») qui est l'échange de feuillets. Mais cette involution est centrale, ce qui ne peut arriver ici, puisque $G \simeq \Gamma/\Lambda$ est simple.

Par conséquent, X admet un plongement isomorphe à une quartique lisse. Mais alors, on a montré dans la proposition 2 que X admet au plus 24 points d'inflexion distincts. Or, on sait que l'image d'une inflexion est une inflexion, et que les orbites de G sur X sont toutes de cardinal au moins 24 (cf. *supra*); cela montre donc que X admet exactement 24 inflexions, formant une orbite sous G , celle de a .

Regardons le point d'inflexion a . Son stabilisateur contient le sous-groupe $\langle \rho \rangle$, et comme $|\text{Stab}(a)| = 168/\omega(a) = 168/24 = 7$, on en déduit que $\text{Stab}(a) = \langle \rho \rangle$. D'autre part, si ρ fixe un point $x \in X$, on vérifie par un argument de cardinalité que $\text{Stab}(x) = \langle \rho \rangle$. Cela montre que l'orbite $\omega(x)$ est de cardinal 24, et donc que c'est l'orbite des inflexions. Donc, si un point est fixé par ρ , c'est une inflexion. Or, les inflexions autres que b et c ne sont pas fixées par ρ . Tout cela montre que abc est une triangle d'inflexion. Enfin, il existe une rotation d'ordre 3 qui permute a , b et c , donc les propositions 1 et 3 montrent que X a pour équation $X^3Y + Y^3T + T^3X = 0$, qui est l'équation de la quartique de KLEIN. \square

3 La quartique de Klein comme courbe modulaire

Dans cette section, nous allons présenter une deuxième manière d'uniformiser la surface de KLEIN. Après avoir donné quelques définitions, nous regarderons des cas similaires et plus

simples, afin de comprendre les enjeux de cette section. Nous avertissons que désormais, aucune démonstration ne sera effectuée, le but étant plus d'appréhender une méthode que d'en disséquer les calculs. Pour plus de détails, on pourra essentiellement se référer à [M-M] et à [Ba].

3.1 Quelques généralités

On note \mathfrak{H} le demi-plan de POINCARÉ $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$, sur lequel agit par automorphismes le groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On désigne par N un entier strictement positif et par $\Gamma(N)$ le *sous-groupe de congruence principale de niveau N* , c'est-à-dire le noyau du morphisme $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ de réduction modulo N .

On va s'intéresser à l'action de $\Gamma(N)$ sur \mathfrak{H} . On montre aisément qu'un élément $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sans point fixe dans \mathfrak{H} dès que $(\text{tr } g)^2 \geq 4$. Or, on peut montrer que tout élément de $\Gamma(N)$ a sa trace congrue à ± 2 modulo N^2 . Ainsi, $\Gamma(N)$ agit sans point fixe pour tout $N \geq 2$, et cela implique que le quotient $\mathfrak{H}/\Gamma(N)$ est une surface de RIEMANN dès que $N \geq 2$.

En fait, les surfaces $\mathfrak{H}/\Gamma(N)$ ne sont en général pas compactes, mais on peut les compléter en surfaces de RIEMANN compactes en leur ajoutant des *pointes* (cf. [Ba]). On notera $X(N)$ ces surfaces compactifiées. Celle qui nous intéresse ici est $X(7)$, qui est isomorphe à la quartique de KLEIN. Mais avant d'aborder ce cas, nous allons regarder les cas $N = 1, 2$ et 5 .

3.2 Le cas $N = 1$: groupe et invariant modulaires

L'étude de l'action de $\Gamma(1) = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathfrak{H} fait apparaître (cf. [Se]) une fonction holomorphe $j : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$, appelée *invariant modulaire* et définie par la formule $j = 1728 \frac{g_2^3}{\Delta}$ où $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, avec $g_2 = 60G_2$ et $g_3 = 140G_3$, les G_k étant les séries d'EISENSTEIN définies sur \mathfrak{H} par $G_k(\tau) = \sum_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}$.

La fonction j est holomorphe sur \mathfrak{H} , et, étant invariante sous $\Gamma(1)$ permet de définir par passage au quotient, une bijection $\mathfrak{H}/\Gamma(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Mieux encore, on peut la prolonger à $X(1)$ en posant $j(\infty) = \infty$, donnant alors un isomorphisme $j : X(1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

De plus, j possède la propriété suivante : une fonction f méromorphe sur \mathfrak{H} est invariante sous l'action de $\Gamma(1)$ si, et seulement si, elle est fraction rationnelle de j . Enfin, on a un développement de j en série :

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^n$$

où $\tau \in \mathfrak{H}$, $q = e^{i\pi\tau}$ et les $c_n \in \mathbb{Z}$. Nous allons retrouver la fonction j dans tout le reste de cette section.

3.3 Le cas $N = 2$

Nous allons maintenant chercher une fonction λ qui réalise un isomorphisme entre $X(2)$ et $\widehat{\mathbb{C}}$. Il faut donc commencer par trouver une fonction λ définie sur \mathfrak{H} et qui soit $\Gamma(2)$ -invariante. Ainsi, elle pourra se factoriser en une application $\mathfrak{H}/\Gamma(2) \rightarrow \mathbb{C}$, qui elle-même pourra se prolonger sur $X(2)$.

Pour $\tau \in \mathfrak{H}$, soient le réseau $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ et \wp la fonction de WEIERSTRASS associée. On définit alors $e_1 = \wp(\frac{1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$ et $e_3 = \wp(\frac{\tau}{2})$ puis

$$\lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1}$$

On montre que la fonction λ est invariante sous $\Gamma(2)$, donc que $\mathbb{C}(\lambda)$ est inclus dans le corps $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})^{\Gamma(2)}$ des fonctions méromorphes sur \mathfrak{H} invariantes par $\Gamma(2)$.

Or, pour τ fixé, les zéros de \wp' sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$ et $\frac{\tau}{2}$, ce qui fait que l'on a $\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$. Comparer cette équation avec l'équation différentielle $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ permet d'exprimer g_2 et $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ en fonction des e_i , et on en déduit l'égalité suivante :

$$j = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda^2)} \quad (1)$$

Cette équation peut être vue comme une équation de degré 6 = $(\Gamma(1) : \Gamma(2))$ d'inconnue λ et à coefficients dans $\mathbb{C}(j)$. Avec un peu de théorie de GALOIS, on peut montrer que $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})^{\Gamma(2)} = \mathbb{C}(\lambda)$.

On peut encore développer λ en série grâce aux fonctions thêta (voir [M-M] pour plus de précisions) :

$$\lambda = \frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$

3.4 Le cas $N = 5$: icosaèdre

On peut calculer le genre de $X(5)$, qui est 0. Le théorème d'uniformisation dit donc que $X(5)$, qui est appelée *icosaèdre*, est isomorphe à $\widehat{\mathbb{C}}$, et de même que précédemment, si z est un isomorphisme $X(5) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{C}}$, alors l'invariant modulaire j et z sont reliés par une relation $j = F(z)$, où F est une fraction rationnelle de degré 60. Plus précisément, la relation s'écrit

$$j = \frac{(-z^{20} + 228z^{15} - 494z^{10} - 228z^5 - 1)^3}{1728z^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5} \quad (2)$$

KLEIN, dans ses travaux sur l'icosaèdre, considère cette relation comme une équation de degré 60 d'inconnue z , j étant un paramètre. Posant $q = e^{i\pi\tau}$, il résout explicitement l'équation :

$$z = q^{2/5} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{5n^2+3n}}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{5n^2+n}}$$

3.5 Le cas $N = 7$: la quartique de Klein

La courbe modulaire $X(7)$ est isomorphe (en tant que surface de RIEMANN) à la quartique de KLEIN. Pour le voir, on peut commencer par calculer le genre de $X(7)$, qui est 3 (on a en fait une formule donnant le genre des courbes $X(\Gamma)$, où Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma(1)$). Alors, comme dans la démonstration du théorème 20, on montre que $X(7)$ est la quartique de KLEIN en montrant que $X(7)$ n'est pas une surface hyperelliptique (puisque son groupe d'automorphismes $\Gamma(1)/\Gamma(7) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ est simple), donc admet un plongement isomorphe à une quartique lisse. L'existence d'un triangle d'inflexion dont les sommets sont permutés par un automorphisme d'ordre 3 permet alors de conclure.

Dans [Kl], KLEIN exprime l'invariant modulaire j en fonction des coordonnées homogènes $(X : Y : T)$. Il commence par définir des polynômes invariants par le groupe G (avec $F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X$) :

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{1}{54} \begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XT} \\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YT} \\ F''_{TX} & F''_{TY} & F''_{T^2} \end{vmatrix} \\ C &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XT} & \nabla'_X \\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YT} & \nabla'_Y \\ F''_{TX} & F''_{TY} & F''_{T^2} & \nabla'_T \\ \nabla'_X & \nabla'_Y & \nabla'_T & 0 \end{vmatrix} \\ K &= \frac{1}{14} \begin{vmatrix} F'_X & \nabla'_X & C'_X \\ F'_Y & \nabla'_Y & C'_Y \\ F'_T & \nabla'_T & C'_T \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les courbes d'équations respectives $\nabla = 0$, $C = 0$ et $K = 0$ coupent chacune la quartique en une famille de points particuliers. Ainsi, $\nabla = 0$ coupe la quartique en les points d'inflexion, tandis que $C = 0$ la coupe en les points de contact des bitangentes et $K = 0$ la coupe en les points sextactiques, qui sont les points où la conique osculatrice est non dégérée et coupe la quartique avec multiplicité au moins six. KLEIN arrive alors à obtenir une relation analogue à (1) et à (2) :

$$j = -\frac{C^3}{\nabla^7} \quad (3)$$

KLEIN arrive même à résoudre explicitement en posant encore une fois $q = e^{i\pi\tau}$ pour $\tau \in \mathfrak{H}$:

$$\frac{X}{Y} = \frac{q^{4/7} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{21n^2+7n}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{21n^2+n} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{21n^2+13n+2}}$$

$$\frac{Y}{T} = \frac{q^{2/7} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{21n^2+7n}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{21n^2+19n+4} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{21n^2+37n+16}}$$

$$\frac{T}{X} = \frac{q^{1/7} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{21n^2+7n}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{21n^2+25n+7} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{21n^2+31n+11}}$$

On pourra rapprocher ces développements en série à celui obtenu pour $N = 5$. On notera toutefois que ce paramétrage n'atteint pas les points d'inflexion de la quartique.

A Annexe 1 : Les formules de Plücker

Les formules de PLÜCKER sont des formules permettant de relier le degré, la *classe*, le nombre de bitangentes et le nombre de points de rebroussement d'une courbe algébrique «suffisamment» lisse. Nous allons préciser cela dans cette annexe, largement inspirée de [Fi].

A.1 Courbe polaire

Soient $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polynôme homogène, $\mathcal{C} = V(F)$ la courbe algébrique correspondante et p un point lisse de \mathcal{C} . La tangente à \mathcal{C} en p , notée $T_p\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(p)X_0 + \frac{\partial F}{\partial X_1}(p)X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}(p)X_2 = 0$$

Un point $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est donc sur $T_p\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\sum_{i=0}^2 \frac{\partial F}{\partial X_i}(p)q_i = 0$.

En notant $D_q F = \sum_{i=0}^2 q_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ et $P_q\mathcal{C} = V(D_q F)$, on a donc l'équivalence suivante :

$$q \in T_p\mathcal{C} \iff p \in P_q\mathcal{C}$$

La courbe algébrique $P_q\mathcal{C}$ est appelée *polaire* de \mathcal{C} par rapport au pôle q . Donnons tout de suite une liste de propriétés de la polaire.

Proposition 21 *Soient F un polynôme homogène de degré n , $\mathcal{C} = V(F)$ et $q \in \mathbb{P}^2$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $P_q\mathcal{C}$ est indépendante du choix des coordonnées.

2. $D_q F = 0$ si, et seulement si, \mathcal{C} est la réunion de n droites passant par q .
3. Dès que $D_q F \neq 0$, on a $\deg D_q F = n - 1$.
4. \mathcal{C} et $P_q \mathcal{C}$ ont une composante commune si, et seulement si \mathcal{C} contient une droite passant par q .
5. Si $p \in \mathcal{C}$ est un point singulier, alors $p \in P_q \mathcal{C}$.

Ces propriétés sont toutes plus ou moins immédiates, nous en omettons par conséquent la démonstration (qu'on trouvera cependant au paragraphe 4.2 de [Fi]). Tout ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 22 *Soit $\mathcal{C} = V(F)$ une courbe algébrique de degré $n \geq 2$ ne contenant pas de droite, et soit $q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Alors $P_q \mathcal{C}$ est une courbe algébrique de degré au plus $n - 1$, sans composante commune avec \mathcal{C} . En outre, l'intersection de \mathcal{C} et de $P_q \mathcal{C}$ est constituée des points $p \in \mathcal{C}$ tels que la droite (pq) est tangente à \mathcal{C} , ainsi que des points singuliers de \mathcal{C} .*

En particulier, étant donné un point q quelconque, le théorème de BEZOUT montre qu'il y a au plus $n(n - 1)$ tangentes à \mathcal{C} passant par q . Les formules de PLÜCKER se démontrant avec le théorème de BEZOUT sur une courbe et une de ses polaires, nous avons besoin de préciser les multiplicités d'intersection.

Proposition 23 *Si une courbe algébrique \mathcal{C} a une tangente T simple en p , c'est-à-dire que $\text{mult}_p(\mathcal{C} \cap T) = 2$, et si $q \in T$ est distinct de p , alors $\text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q \mathcal{C}) = 1$.*

Démonstration

On peut toujours supposer $p = (1 : 0 : 0)$ et $T = V(X_2)$, de sorte que F s'écrive sous la forme $F = X_1^2 G(X_0, X_1) + X_2 H(X_0, X_1, X_2)$ avec $G(1, 0)$ et $H(1, 0, 0)$ non nuls. Dire que $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ est sur $T \setminus \{p\}$ donne $q_2 = 0$ et $q_1 \neq 0$.

Ainsi, on a

$$D_q F = q_0 \left(X_1^2 \frac{\partial G}{\partial X_0} + X_2 \frac{\partial H}{\partial X_0} \right) + q_1 \left(2X_1 G + X_1^2 \frac{\partial G}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial H}{\partial X_1} \right)$$

Calculer alors le résultant de F et de $D_q F$ par rapport à X_2 donne le résultat. \square

Corollaire 24 *Soient \mathcal{C} de degré n et q un point hors de \mathcal{C} . Alors presque toutes les droites passant par q (c'est-à-dire toutes sauf un nombre fini) ont n points d'intersection simple avec \mathcal{C} .*

A.2 Courbe duale

Rappelons d'abord qu'un point $L = (y_0 : y_1 : y_2)$ du plan projectif dual $\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{C})$ peut être vu comme la droite $V(y_0 X_0 + y_1 X_1 + y_2 X_2)$ du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Soit maintenant une courbe algébrique $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$. On définit la *courbe duale* \mathcal{C}^* comme l'ensemble des points $L \in \mathbb{P}^{2*}$ tels que la droite L est tangente à \mathcal{C} en un certain point.

Théorème 25 Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique ne contenant pas de droite. Alors

1. \mathcal{C}^* est une courbe algébrique.
2. Si \mathcal{C} est irréductible, alors \mathcal{C}^* l'est aussi, et $\deg \mathcal{C}^* \geq 2$.
3. $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$

Nous n'allons pas démontrer ce théorème, mais en indiquer les grandes lignes (au moins pour le dernier point). L'idée est la suivante : étant donné un paramétrage de \mathcal{C} , on trouve un paramétrage, d'abord local puis global, de \mathcal{C}^* . Cette méthode va en fait nous permettre de relier le nombre de points d'inflexion d'une courbe au nombre de points de rebroussement de la courbe duale. Nous allons donc admettre le théorème suivant :

Théorème 26 Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ une courbe algébrique irréductible. Alors il existe une surface de Riemann compacte S et une application $\varphi : S \rightarrow \mathcal{C}$ holomorphe, et biholomorphe hors des points singuliers de \mathcal{C} .

Soit donc un tel paramétrage φ , on va chercher un paramétrage $\varphi^* : S \rightarrow \mathcal{C}^*$. Soit $o \in S$ fixé, t une coordonnée dans un voisinage ouvert U de o . Alors $\varphi|_U$ se relève en une application holomorphe $\phi : t \in U \mapsto (\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. La tangente à \mathcal{C} en un point $\varphi(t)$ est le sous-espace engendré par $\phi(t)$ et sa dérivée $\dot{\phi}(t)$. Cette tangente a donc pour équation

$$a_0(t)X_0 + a_1(t)X_1 + a_2(t)X_2 = 0$$

où $a_0 = \phi_1\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\phi_2$, $a_1 = \phi_2\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_2\phi_0$ et $a_2 = \phi_0\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0\phi_1$. On a donc trouvé un paramétrage $\varphi^*(t) = (a_0(t) : a_1(t) : a_2(t))$.

Il reste à montrer que φ^* est indépendante du choix du relèvement et des coordonnées locales, puis à l'étendre en une application $S \rightarrow \mathbb{C}^*$. Nous renvoyons au paragraphe 5.4 de [Fi] pour les détails. Nous disposons enfin d'un lemme donnant une forme «normale» du paramétrage.

Lemme 27 Soient U un voisinage ouvert de $o \in \mathbb{C}$ et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{P}^2$ une application holomorphe telle que $\varphi(U)$ n'est pas inclus dans une droite. Alors il existe un unique couple d'entiers positifs (α_1, α_2) tel que, après changement de coordonnées, on ait

$$\varphi(t) = (1 : t^{1+\alpha_1} + \dots : t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \dots)$$

les points de suspension désignant des termes d'ordre supérieur.

Notant $p = \varphi(0)$ et $\mathcal{C} = \varphi(U)$, on obtient alors $1 + \alpha_1 = \text{ord}_p(\mathcal{C})$ et $2 + \alpha_1 + \alpha_2 = \text{mult}_p(\mathcal{C} \cap T_p\mathcal{C})$. En particulier, le point p est d'inflexion simple (c'est-à-dire de multiplicité d'intersection avec la tangente égale à 3) si, et seulement si, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$.

Compte tenu de ce qui précède, on peut calculer la forme «normale» de φ^* en fonction de celle de φ . Avec les notations du lemme, les calculs donnent

$$\varphi^* = ((1 + \alpha_2)t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \dots : -(2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_2} + \dots : (1 + \alpha_1) + \dots)$$

Cela montre en particulier que

$$\begin{aligned}\alpha_1^* &= \alpha_2 \\ \alpha_2^* &= \alpha_1\end{aligned}$$

On peut alors continuer les calculs pour calculer $(\varphi^*)^*$, et on trouve que $(\varphi^*)^* = \varphi$, d'où $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$.

Enfin, on peut effectuer les calculs pour trouver les coefficients α_1 et α_2 correspondant à un point de rebroussement simple (c'est-à-dire de multiplicité d'intersection avec la tangente égal à 3), et on trouve $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$ dans ce cas.

Tout ce qui précède montre alors que la dualité des courbes fait correspondre les points de rebroussement simples d'une courbe algébrique aux points d'inflexion simples de la courbe duale.

A.3 Les formules de Plücker

Nous sommes presque en mesure d'énoncer et de démontrer les formules de PLÜCKER. Nous introduisons encore la *classe* d'une courbe \mathcal{C} comme étant, par définition, le nombre maximal de tangentes pouvant être menées d'un point $q \in \mathbb{P}^2$ à un point lisse de \mathcal{C} .

Proposition 28 *Soit \mathcal{C} une courbe algébrique de degré au moins 2. Alors la classe n^* de \mathcal{C} est égale au degré de la courbe duale \mathcal{C}^* . De plus, pour presque tout $q \in \mathbb{P}^2$, on peut effectivement mener n^* tangentes à la courbe.*

Démonstration

Si $q \in \mathbb{P}^2$, alors q^* est l'ensemble des droites passant par q , de sorte que l'intersection $q^* \cap \mathcal{C}^*$ est formée des points $L \in \mathbb{P}^{2*}$ tels que L est une tangente à \mathcal{C} passant par q . Or, le théorème de BEZOUT donne $\deg \mathcal{C}^* = \text{Card}(q^* \cap \mathcal{C}^*)$. Et on a vu précédemment que pour presque toute droite de q^* , les points d'intersection avec \mathcal{C} sont simples. \square

Introduisons à présent quelques notations : on désigne par d (resp. d^*) le nombre de points doubles de \mathcal{C} (resp. de \mathcal{C}^*) et par s (resp. s^*) le nombre de points de rebroussement de \mathcal{C} (resp. de \mathcal{C}^*). Nous appellerons en outre *courbe de Plücker* une courbe algébrique de degré supérieur à 2 et dont les points singuliers sont au pire des points d'inflexions simples ou des points de rebroussement simples. On pourra remarquer que, pour une courbe de PLÜCKER, d^* est égal au nombre de bitangentes de \mathcal{C} et que s^* est égal au nombre de points d'inflexion de \mathcal{C} (on l'a vu dans le paragraphe précédent).

Théorème 29 *Pour une courbe de PLÜCKER de degré n et de classe n^* , on a*

$$\begin{aligned}n^* &= n(n-1) - 2d - 3s \\ s^* &= 3n(n-2) - 6d - 8s \\ n &= n^*(n^*-1) - 2d^* - 3s^* \\ s &= 3n^*(n^*-2) - 6d^* - 8s^*\end{aligned}$$

Démonstration

Commençons par montrer la première formule. On choisit q de sorte qu'il y ait exactement n^* tangentes à \mathcal{C} passant par q , en les points (lisses) p_1, \dots, p_{n^*} (puisque l'on considère une courbe de PLÜCKER, il suffit d'ailleurs de choisir q hors des bitangentes et des tangentes d'inflexion).

Pour $p \in \{p_1, \dots, p_{n^*}\}$, on a $\text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q\mathcal{C}) = 1$ car $q \in T_p\mathcal{C} \setminus \{p\}$ (cf Proposition 23). Par le théorème de BEZOUT, et en convenant qu'une multiplicité d'intersection en un point est nulle si ce point n'est pas dans l'intersection, on a

$$n(n-1) = \sum_{p \in \mathcal{C} \text{ lisse}} \text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q\mathcal{C}) + \sum_{p \in \mathcal{C} \text{ singulier}} \text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q\mathcal{C})$$

Dans la première somme, la multiplicité vaut 1 ou 0 suivant que $p \in \{p_1, \dots, p_{n^*}\}$ ou pas, ce qui donne

$$n(n-1) = n^* + \sum_{p \in \mathcal{C} \text{ singulier}} \text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q\mathcal{C})$$

Il reste donc à montrer que si p est un point double simple (resp. un point de rebroussement simple), alors $\text{mult}_p(\mathcal{C} \cap P_q\mathcal{C}) = 2$ (resp. 3). Nous renvoyons à [Fi], paragraphe 5.9) pour ces points calculatoires.

Pour la deuxième formule, l'idée est la même en remplaçant la polaire par la hessienne (qui coupe la courbe en les points d'inflexion). Les deux dernières formules s'obtiennent par dualité. Le lecteur trouvera encore une fois tous les détails dans [Fi]. \square

B Annexe 2 : Genre, revêtements et recollements

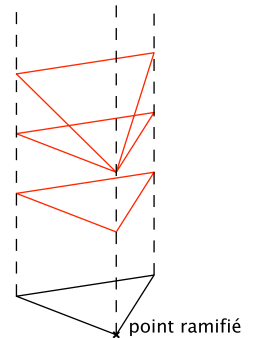
On supposera connu le fait que pour une triangulation d'une surface S faisant intervenir s sommets, a arêtes et f faces, la *caractéristique d'Euler* $\chi = s - a + f$ de S est indépendante du choix de la triangulation, et que l'on a $\chi = 2 - 2g$, g étant le genre de S .

B.1 Genre et revêtements

On a un théorème dû à HURWITZ permettant de calculer le genre d'un revêtement, au moins dans un cas particulier :

Théorème 30 *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement de degré d , ramifié en n points de B , et tel que les fibres des points ramifiés soient de cardinal $d - 1$. Soient g et g' les genres de B et X respectivement. Alors on a la formule suivante :*

$$g' - 1 = d(g - 1) + \frac{n}{2}$$



Idée de démonstration : On utilise une triangulation de B faisant intervenir les points de ramification, et on la relève en une triangulation de X . Avec les notations usuelles, on a $f' = d.f$, $a' = d.a$ et $s' = d.s - n$. Donc $2 - 2g' = s' - a' + f' = d(2 - 2g) - n$, et le résultat s'ensuit. \square

On va maintenant pouvoir calculer le genre d'une courbe algébrique plane, projective, lisse et de degré d .

Théorème 31 *Le genre d'une courbe algébrique plane, projective, lisse et de degré d est*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Démonstration : Soit X une telle courbe. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que X a pour équation $f(x, y) = y^d + a_{d-1}(x)y^{d-1} + \dots + a_0(x) = 0$. Alors on a un revêtement $p : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$ qui est de degré d . Les points de ramification sont ceux où $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (il y en a donc $d(d-1)$ par le théorème de BEZOUT), et quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que les fibres des points ramifiés sont de cardinal $d-1$. Du théorème précédent découle alors l'égalité $g - 1 = -d + \frac{d(d-1)}{2}$, qui conduit immédiatement au résultat. \square

B.2 Genre et recollements

Proposition 32 *Soit un polygone plan convexe à $2n$ côtés. On identifie les côtés deux à deux, de sorte qu'il ne reste que p sommets. Alors, si le quotient est une surface compacte, sans bord et orientable, son genre est donné par*

$$g = \frac{n - p + 1}{2}$$

Démonstration : On triangule le polygone en faisant relier les sommets entre eux et à un point à l'intérieur du polygone. On a alors $f = 2n$ faces, $a = 4n$ arêtes et $s = 2n + 1$ sommets. Après recollement, il reste $f' = 2n$ faces, $a' = 3n$ arêtes et $s' = p + 1$ sommets (ne pas oublier le point «central»). Il vient donc $2 - 2g = p + 1 - 3n + 2n$, d'où $g = \frac{n - p + 1}{2}$. \square

Références

- [Ba] BAVARD C. : *La surface de Klein*, Journal de maths des élèves de l'ENS Lyon, Volume 1 (1993), No. 1.
- [Br] BROUGHTON A. : «Classifying finite group actions on surfaces of low genus», *J. Pure Appl. Algebra* 69, p. 233-270, 1990.
- [C-M] COXETER H.S.M, MOSER W.O.J : *Generators and relations for discrete groups*, Springer, 1957.

- [Do] DOUADY R. et A. : *Algèbre et théories galoisiennes, vol. II*, Cedic, 1979.
- [Fi] FISCHER G. : *Plane algebraic curves*, AMS, 2001.
- [Kl] KLEIN F. : *Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, traduit par S. LEVY dans [Le].
- [Le] LEVY S. : *The eightfold way*, Cambridge university Press, 1999, <http://www.msri.org/publications/books/Book35/>.
- [M-M] MCKEAN H., MOLL V. : *Elliptic curves*, Cambridge University Press, 1997.
- [Pe1] PERRIN D. : *La quartique de Klein et le groupe simple d'ordre 168*, Université Paris-sud Orsay, <http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/klein/>.
- [Pe2] PERRIN D. : *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [Re] REYSSAT E. : *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhäuser, 1989.
- [Se] SERRE J.P. : *Cours d'arithmétique*, P.U.F., 1970.