

## LA SURFACE DE KLEIN

Christophe Bavard

### Introduction

En 1878, Felix Klein découvre une surface remarquable ([K11]). Il en donne tout de suite plusieurs descriptions : algébrique (courbe algébrique), arithmétique (courbe modulaire), géométrique (surface hyperbolique) et combinatoire (polyèdre régulier). Les aspects algébrique et arithmétique sont liés à la théorie des équations algébriques : l'une des principales motivations de Klein dans [K11] est de prolonger ses travaux sur l'icosaèdre. Concernant l'aspect géométrique, Klein établit que sa surface est un quotient du demi-plan supérieur, et obtient ainsi le premier exemple d'uniformisation (paramétrage global par un seul paramètre complexe) d'une courbe algébrique de genre  $> 1$ . Auparavant, seule l'uniformisation des courbes de degré  $\leq 3$  était connue. La surface de Klein marque donc une étape importante dans la théorie de l'uniformisation, qui sera achevée bien plus tard (en 1907) par Koebe et Poincaré.

Nous allons décrire la surface de Klein et les relations entre ses diverses formes : plus qu'un exemple, ce sera un prétexte pour illustrer quelques résultats de base sur les surfaces de Riemann.

**Remerciements.** Je remercie Nicolas Pouyanne pour son aide dans la lecture de l'article [K11].

### 1 La surface de Klein comme courbe plane lisse

#### La quartique de Klein

Cette première construction, de nature algébrique, est sans doute la plus directe et la plus explicite. Plaçons-nous dans le plan projectif complexe  $\mathbf{P}^2$  qui est l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbf{C}^3$ . Un point  $p$  de  $\mathbf{P}^2$  est repéré par ses *coordonnées homogènes* : ce sont les coordonnées de n'importe quel vecteur non nul de  $\mathbf{C}^3$  porté par la droite représentant  $p$ . Voici en coordonnées homogènes  $[x, y, z]$  une équation qui définit la surface de Klein comme courbe de degré 4 (quartique) de  $\mathbf{P}^2$  :

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

C'est la *quartique de Klein*; nous la noterons  $\mathcal{K}$ . On remarque immédiatement une propriété importante : les dérivées partielles de  $f = x^3y + y^3z + z^3x$  ne s'annulent pas simultanément sur la courbe. Cela assure l'existence d'une tangente en tout point  $p$  de  $\mathcal{K}$ , d'équation  $xf'_x(p) + yf'_y(p) + zf'_z(p) = 0$ ; on dit que la courbe est *lisse*.

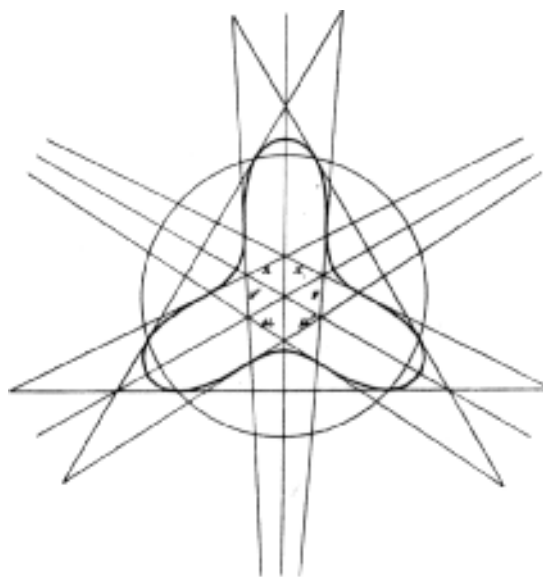


Figure 1 : Les points réels de  $\mathcal{K}$  [K11]

#### Points particuliers sur la courbe

La géométrie algébrique élémentaire nous enseigne que certains points des courbes planes sont spéciaux. Ainsi la quartique de Klein admet *24 points d'inflexions* (points où la tangente est définie et a une intersection au moins triple avec la courbe) et 28 bitangentes (voir [B-K] pour des formules générales); ces bitangentes définissent *56 points de contact*. Sur  $\mathcal{K}$  il y a aussi *84 points sextactiques* ("sextaktischen Punkte") : il s'agit des points où la conique osculatrice est non dégénérée (i.e. ces points ne sont pas d'inflexion) et coupe la courbe avec multiplicité au moins six.

La compréhension des configurations (remarquables) formées par les points particuliers est facilitée par l'existence de nombreuses transformations linéaires projectives qui fixent la courbe. En voici trois, plus ou moins évidentes :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \gamma x \\ y' = \gamma^4 y \\ z' = \gamma^2 z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = Ax + By + Cz \\ y' = Bx + Cy + Az \\ z' = Cx + Ay + Bz \end{cases}$$

avec  $\gamma = e^{2i\pi/7}$ ,  $A = \gamma^5 - \gamma^2$ ,  $B = \gamma^3 - \gamma^4$  et  $C = \gamma^6 - \gamma$  ([K11]). Ces transformations sont respectivement d'ordre 3, 7 et 2, et on peut vérifier que le groupe  $G$  qu'elles engendrent est exactement le sous-groupe de  $PGL_2(\mathbf{C})$  fixant la quartique. C'est un groupe d'ordre 168 dont la structure deviendra claire à la section suivante.

Venons-en maintenant à la description des trois familles de points particuliers; chacune est reliée à un certain type de sous-groupe de  $G$ . Dans  $G$  il y a 8 sous-groupes d'ordre 7, fixant chacun trois points d'inflexion. Ces triplets de points s'obtiennent géométriquement de la manière suivante. Toute tangente d'inflexion recoupe la courbe en un autre point d'inflexion. Les tangentes menées successivement à partir d'un point d'inflexion  $a_1$  définissent ainsi une suite de points d'inflexion  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4 = a_1$ . Ces trois points forment avec leurs tangentes ce que Klein appelle *un triangle d'inflexion*. Par exemple les points  $[1,0,0]$ ,  $[0,0,1]$  et  $[0,1,0]$  sont fixes par la transformation d'ordre 7 ci-dessus et le triangle d'inflexion correspondant a pour équation  $xyz = 0$ .

Les 28 bitangentes sont associées aux 28 sous-groupes d'ordre 3 de  $G$ . Chacun fixe les 2 points de contact situés sur une même bitangente. Ainsi la transformation d'ordre 3 ci-dessus fixe  $[1, j, j^2]$  et  $[1, j^2, j]$ , points de contact de  $\mathcal{K}$  avec la bitangente d'équation  $x + y + z = 0$ .

Enfin, les 84 points sextactiques se répartissent en 21 *quadruplets*, qui correspondent aux involutions de  $G$ . Une involution de  $G$  fixe un point non situé sur la courbe (centre) et une droite point par point (axe), dont l'intersection avec la courbe est précisément un quadruplet de points sextactiques. Les centres et les axes des 21 involutions forment une configuration remarquable : chaque axe contient 4 centres et par chaque centre passent 4 axes.

### Courbes lisses et surfaces de Riemann

Nous allons voir que la quartique de Klein, du fait qu'elle est lisse, est naturellement une *surface de Riemann*. Mais rappelons d'abord cette notion. Soit  $X$  un espace topologique; on appelle *coordonnée locale complexe* tout homéomorphisme d'un ouvert de  $X$  sur

un ouvert du plan de  $\mathbf{C}$ . Une surface de Riemann est un espace  $X$  connexe et séparé, muni d'un système de coordonnées locales complexes dont les domaines recouvrent  $X$ , et quand les domaines de deux coordonnées locales  $z$  et  $w$  se coupent,  $w$  est fonction holomorphe de  $z$ . On parle aussi de *structure de surface de Riemann* pour désigner un tel système de coordonnées complexes quand la topologie est déjà donnée. Noter au passage la terminologie : une surface de Riemann est à la fois une *courbe* (de dimension 1 sur  $\mathbf{C}$ ) et une *surface* (de dimension 2 sur  $\mathbf{R}$ ).

Considérons maintenant un point  $p = [x_0, y_0, z_0]$  de  $\mathcal{K}$ . En supposant  $z_0 \neq 0$ , la courbe  $\mathcal{K}$  peut être décrite, au voisinage de  $p$ , en coordonnées affines  $u = x/z$ ,  $v = y/z$  par l'équation  $\varphi(u, v) = f(u, v, 1) = 0$ . La relation d'Euler  $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 4f$  montre alors que les deux dérivées partielles  $\varphi'_u$  et  $\varphi'_v$  ne sont pas simultanément nulles en  $p$ ; on peut donc prendre (grâce au théorème des fonctions implicites holomorphe)  $u$  ou  $v$  comme coordonnée locale de  $\mathcal{K}$  au voisinage du point  $p$ . Ainsi en tout point de la courbe, l'une des coordonnées affines du plan projectif est une coordonnée locale de  $\mathcal{K}$ ; il est clair que les changements de coordonnées affines ambiantes sont holomorphes.

En fait l'argument précédent est valable pour toute courbe algébrique lisse de  $\mathbf{P}^2$ . Par ailleurs, on montre qu'une telle courbe est connexe ([Sha]). *On a donc un premier exemple de surface de Riemann (compacte) : les courbes algébriques planes lisses.*

### La topologie des courbes planes lisses

Une surface de Riemann est avant tout une surface topologique connexe et séparée, qui est toujours *orientable*, et même *orientée* dès que le plan complexe est orienté. On a d'abord des orientations locales (en transportant celle du plan complexe par les coordonnées) et comme les changements de coordonnées qui sont holomorphes conservent l'orientation de  $\mathbf{C}$ , les diverses orientations locales coïncident.

Dans le cas compact, on sait que toute surface connexe orientable est topologiquement une somme connexe de tores. Le nombre  $g$  de ces tores est bien déterminé et s'appelle le *genre* de la surface (pour la sphère, on pose  $g = 0$ ) ([Ma]). On a donc un invariant numérique des surfaces de Riemann : le genre. C'est un invariant bien grossier; il y a une infinité de

surfaces de Riemann portées par le tore, et il en est de même en genre supérieur.

Le genre des courbes planes *lisses* s'exprime très simplement en fonction de leur degré  $d$  (voir par exemple [Re]) par la formule :

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Ainsi les droites et les quadriques lisses ont la topologie de la sphère, les cubiques lisses celle du tore, et la courbe de Klein, comme toute quartique lisse, est de genre 3. Observons pour terminer que le genre d'une courbe plane lisse n'est pas quelconque (par exemple, il ne vaut jamais 2).

## 2 La surface de Klein comme courbe modulaire

C'est à partir de cette construction de nature arithmétique que Klein a déduit l'équation de la quartique et la description géométrique.

### Le sous-groupe de congruence modulo 7

Le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ , appelé *groupe modulaire*, agit par automorphismes sur le demi-plan supérieur de Poincaré qui sera noté  $\mathbf{H}$ . Cette action est analogue à l'action de  $\mathbf{Z}^2$  sur  $\mathbf{C}$  par translations entières, à ceci près que certains éléments de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$  ont des points fixes dans  $\mathbf{H}$ . Le groupe modulaire est engendré par les transformations  $\tau' = \tau + 1$  et  $\tau' = -1/\tau$  ( $\tau \in \mathbf{H}$ ). On détermine facilement un *domaine fondamental*  $\mathcal{D}$  pour son action sur  $\mathbf{H}$ , c'est-à-dire un fermé (connexe) dont les translats recouvrent l'espace tout en étant d'intérieurs disjoints :

$$\mathcal{D} = \{\tau \in \mathbf{H} / |\mathrm{Re} \tau| \leq 1/2, |\tau| \geq 1\}.$$

On pourra consulter [Se] pour les détails. Le quotient du demi-plan de Poincaré par le groupe modulaire est d'une grande importance (voir plus loin).

Le groupe modulaire contient de nombreux sous-groupes définis par des conditions de nature arithmétique, portant sur les représentants matriciels de ses éléments. Soit  $N$  un entier naturel non nul et  $I$  la matrice identité ; on définit le *sous-groupe de congruence principal de niveau  $N$*  en posant :

$$\Gamma(N) = \{\pm A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) / \pm A \equiv I \pmod{N}\}.$$

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au sous-groupe  $\Gamma(7)$  étudié par Klein dans [Kl1]. Tout d'abord, *il agit sans points fixes*. Rappelons qu'un élément non trivial  $\gamma$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$  n'a pas de points

fixes dans  $\mathbf{H}$  dès que  $(\mathrm{trace} \gamma)^2 \geq 4$ . Or, la trace d'un élément de  $\Gamma(7)$  (définie au signe près) est congrue à  $\pm 2$  modulo 7. En fait, une analyse plus fine montre que les traces des éléments de  $\Gamma(N)$  sont congrues à  $\pm 2$  modulo  $N^2$ , de sorte que  $\Gamma(N)$  agit aussi sans points fixes dès que  $N \geq 2$ .

Comme l'action de  $\Gamma(7)$  sur  $\mathbf{H}$  est sans points fixes et discontinue, l'espace quotient  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$  est une *surface de Riemann*, dont les coordonnées complexes sont les sections locales de la projection  $\mathbf{H} \rightarrow \Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$ . Par construction, cette surface se trouve pourvue d'un joli groupe d'automorphismes. Considérons en effet le corps à 7 éléments  $\mathbf{F}_7 = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ . Le groupe  $\Gamma(7)$  est le noyau de la réduction modulo 7 à valeurs dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$  ; celle-ci est surjective car  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$  est engendré par les transvections (voir par exemple [K-M]). Donc  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})/\Gamma(7)$  agit naturellement par automorphismes sur  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$ . On peut vérifier (c'est un petit exercice) que cette surface n'admet pas d'autres automorphismes, i.e. que tout élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$  normalisant  $\Gamma(7)$  appartient à  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$  (voir aussi la fin de 3). Le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$  est le deuxième groupe simple (non abélien !) après le groupe alterné  $A_5$  ; il comprend 168 éléments.

### Pointes

Le quotient de  $\mathbf{H}$  par le groupe modulaire n'est pas compact : on s'en convainc facilement en examinant son domaine fondamental  $\mathcal{D}$  ; on voit même qu'il suffit d'ajouter un point pour compactifier le quotient. De façon analogue,  $\Gamma(7)$  admet un domaine fondamental qui est réunion de 168 translats de  $\mathcal{D}$ , et on pourra compactifier la surface  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$  en ajoutant un nombre fini de points.

Plus précisément, commençons par étendre l'action du groupe modulaire, que nous noterons désormais  $\Gamma(1)$ , à  $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ , où  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$  est l'orbite de  $\infty$  par  $\Gamma(1)$ . Les orbites de  $\Gamma(7)$  sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$  sont appelées *pointes* de  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$  (ou de  $\Gamma(7)$ ). Notons  $\Gamma_\infty(1)$  (resp.  $\Gamma_\infty(7)$ ) le stabilisateur de  $\infty$  dans  $\Gamma(1)$  (resp.  $\Gamma(7)$ ), en remarquant que  $\Gamma_\infty(7)$  est d'indice 7 dans  $\Gamma_\infty(1)$ . Alors  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$  s'identifie à  $\Gamma(1)/\Gamma_\infty(1)$  et  $\Gamma(7) \backslash \Gamma(1)$  agit transitivement sur l'ensemble des pointes de  $\Gamma(7)$ . Le stabilisateur de la pointe associée à  $\infty$  est isomorphe à  $\Gamma_\infty(7) \backslash \Gamma_\infty(1)$  ; on dénombre ainsi  $168/7 = 24$  *pointes*.

### Complétion des courbes modulaires

La topologie de  $\mathbf{H}$  peut être prolongée à  $\mathbf{H}^*$  : les voisinages (épointés) des points de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$  seront par définition les “horoboules” centrées en ces points, c’est-à-dire les  $B_\alpha = \{\tau \in \mathbf{H} \mid \text{Im } \tau > \alpha\}$  ( $\alpha$  réel  $> 0$ ) et leurs images par  $\Gamma(1)$ . L’espace  $\mathbf{H}^*$  est séparé. Prouvons que le quotient  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}^*$  l’est également. Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma(1)$  ne fixant pas l’infini on a l’inégalité :

$$\text{Im } \gamma(\tau) \text{ Im } \tau \leq 1 \quad (\tau \in \mathbf{H}).$$

On peut donc séparer la pointe  $\infty$  de n’importe quel point de  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$ . Une autre pointe est de la forme  $\delta(\infty)$  où  $\delta$  est un élément de  $\Gamma(1) - (\Gamma(7) \cup \Gamma_\infty(1))$ ; l’inégalité précédente montre que  $\delta(B_\alpha)$  et  $\gamma(B_\alpha)$  sont disjoints pour  $\alpha > 1$  et  $\gamma$  dans  $\Gamma(7)$ .

En fait  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}^*$  est compact. Pour le prouver il suffit de vérifier que  $\Gamma(1) \backslash \mathbf{H}^*$  est compact. Soit  $p_n$  une suite de points de  $\Gamma(1) \backslash \mathbf{H}$  représentés par des  $\tau_n$  dans  $\mathcal{D}$ . Alors  $p_n$  “sous-converge” vers un point de  $\Gamma(1) \backslash \mathbf{H}$  ou vers la pointe  $\infty$  suivant que  $\text{Im } \tau_n$  est bornée ou non.

Le plus intéressant est que l’on peut maintenant prolonger la structure de surface de Riemann à  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}^*$ . Un voisinage (épointé) de la pointe  $\infty$  est  $\Gamma_\infty(7) \backslash B_\alpha$  pour  $\alpha$  grand -quand  $\mathbf{H}$  est muni de la métrique de Poincaré, c’est vraiment une pointe! On voit ainsi que

$$s = e^{2i\pi\tau/7} \quad (\text{Im } \tau > \alpha)$$

induit une coordonnée complexe au voisinage de la pointe  $\infty$ ; on procède de même pour les autres pointes. Nous noterons désormais  $X(7)$  la surface de Riemann  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}^*$ . Evidemment, tout automorphisme de  $\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}$  se prolonge à  $X(7)$  par le théorème des singularités inexistantes; d’après le théorème de Hurwitz,  $X(7)$  n’admet pas d’autres automorphismes (voir 3).

La construction précédente est valable pour tout sous-groupe  $\Gamma$  d’indice fini du groupe modulaire :  $\Gamma \backslash \mathbf{H}$  est une surface (même s’il y a des points fixes, voir plus bas) que l’on complète en une surface de Riemann compacte par adjonction des pointes. C’est notre deuxième exemple de surfaces de Riemann : les courbes (ou surfaces) modulaires.

### Genre des courbes modulaires

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d’indice fini du groupe modulaire  $\Gamma(1)$ . Discutons d’abord la question des points fixes. Dans  $\Gamma(1)$ , tout élément non trivial qui a un

point fixe est conjugué à  $\tau' = -1/\tau$  (d’ordre 2) ou à  $\tau' = 1 - 1/\tau$  (d’ordre 3). Un point fixe éventuel d’un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  est isolé, avec un stabilisateur cyclique d’ordre 2 ou 3;  $\gamma$  induit lui-même une coordonnée complexe du quotient au voisinage du point correspondant. Ainsi, comme il a été dit précédemment,  $\Gamma \backslash \mathbf{H}$  est toujours une surface de Riemann. On note  $X(\Gamma)$  la surface complétée par les pointes.

La surface  $X(1)$  est isomorphe à la sphère de Riemann  $\tilde{\mathbf{C}}$ ; nous reviendrons plus tard sur ce cas particulier important. A partir de là, il est facile de déterminer le genre de  $X(\Gamma)$  pour  $\Gamma$  quelconque. Notons  $\nu_2$  (resp.  $\nu_3$ ) le nombre d’orbites de points fixes d’ordre 2 (resp. 3),  $\nu_\infty$  le nombre de pointes et  $\mu$  l’indice de  $\Gamma$  dans  $\Gamma(1)$ . Le genre de  $X(\Gamma)$  est alors donné par ([Shi]) :

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}.$$

L’application numérique pour le cas qui nous intéresse montre que  $X(7)$  est de genre 3. On devine maintenant ce qui va suivre.

### Isomorphisme entre $X(7)$ et $\mathcal{K}$

Nous allons voir que la courbe modulaire  $X(7)$  est isomorphe (comme surface de Riemann) à la quartique de Klein. En fait ce phénomène est général : **toute surface de Riemann est isomorphe à une courbe algébrique lisse dans l’espace projectif complexe de dimension 3** ([Re]). Cette correspondance est remarquable, et elle n’est jamais évidente, même en genre 1 (voir le paragraphe suivant).

En genre 3 on peut préciser l’énoncé précédent. Il y a deux types de surfaces : *hyperelliptique*<sup>1</sup> et “général”. Une surface générale de genre 3 admet un plongement canonique dans  $\mathbf{P}^2$  dont l’image est une quartique lisse. De plus les automorphismes de la surface sont induits par des transformations linéaires projectives via le plongement canonique ([Re]).

On sait que le groupe d’automorphismes d’une surface hyperelliptique contient un élément central d’ordre 2 (l’involution hyperelliptique). La surface  $X(7)$  ne peut pas être hyperelliptique puisque son groupe d’automorphismes est simple. Elle est donc isomorphe à une quartique lisse  $\mathcal{Q}$ ; de plus le groupe  $G$  des transformations linéaires projectives fixant  $\mathcal{Q}$  est isomorphe à  $\text{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ .

<sup>1</sup> On appelle *hyperelliptique* une surface qui, comme les courbes elliptiques, admet une fonction méromorphe de degré 2.

On détermine facilement une équation de  $\mathcal{Q}$  en traduisant dans le cadre projectif l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$  sur  $X(7)$  ([K11]). Comme les stabilisateurs sont cycliques d'ordre 1,2,3 ou 7, les orbites de  $G$  ont 168, 84, 56 ou 24 éléments. Ainsi  $G$  doit agir transitivement sur les points d'inflexions de  $\mathcal{Q}$  qui doivent être au nombre de 24 et tous simples (une quartique lisse a 24 inflexions comptées avec multiplicité). Ils correspondent aux pointes de  $X(7)$  : ce sont les points fixes des éléments d'ordre 7. Soit  $p$  un point d'inflexion de  $\mathcal{Q}$  et  $g$  dans  $G$  fixant  $p$  ( $g^7 = 1$ ) ; la tangente d'inflexion est fixe par  $g$ , donc recoupe  $\mathcal{Q}$  en un autre point d'inflexion. Comme  $g$  a exactement 3 points fixes sur  $\mathcal{Q}$ , on retrouve un triangle d'inflexion. Par ailleurs, les 3 points fixes d'un élément d'ordre 7 sont permutés cycliquement par un élément d'ordre 3 (les pointes  $\infty, 2/7$  et  $3/7$ , fixes par  $\tau' = \tau + 1$ <sup>2</sup>, sont permutées cycliquement par  $\tau' = (2\tau - 1)/(7\tau - 3)$ ). On peut donc supposer que l'équation de  $\mathcal{Q}$  est de la forme :

$$\alpha(x^3y + y^3z + z^3x) + \beta xyz(x + y + z) = 0,$$

invariante par permutation cyclique des coordonnées et où les axes forment un triangle d'inflexion. L'invariance de  $\mathcal{Q}$  par une transformation diagonale d'ordre 7 montre que  $\beta = 0$  et on retrouve la quartique de Klein (voir 1).

Dans [K11], Klein parvient même à déterminer un paramétrage de sa courbe à l'aide de  $q = e^{i\pi\tau}$  ( $\tau \in \mathbf{H}$ ), donné par le système (1) suivant :

$$\frac{x}{y} = \frac{q^{\frac{4}{7}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{21h^2+h} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{21h^2+13h+2}},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{q^{\frac{2}{7}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{21h^2+19h+4} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{21h^2+37h+16}},$$

$$\frac{z}{x} = \frac{q^{\frac{1}{7}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{21h^2+25h+7} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{21h^2+31h+11}}.$$

<sup>2</sup> La pointe  $9/7$  (resp.  $10/7$ ) est  $\Gamma(7)$ -équivalente à  $2/7$  (resp.  $3/7$ ) par  $\tau' = (127\tau - 35)/(98\tau - 27)$  (resp.  $\tau' = (281\tau - 119)/(196\tau - 83)$ ).

Nous donnerons plus loin l'interprétation algébrique de ce résultat. Remarquons (c'est important) que le paramétrage ne couvre pas les points d'inflexions.

### Lien avec les courbes elliptiques

Une *courbe elliptique* est une surface de Riemann de genre 1 munie d'un point base. Rappelons que les courbes modulaires  $X(N)$ , et en particulier  $X(1)$  et  $X(7)$ , s'interprètent comme espaces de modules (i.e. de classes d'isomorphisme) de courbes elliptiques.

D'après le théorème d'uniformisation (voir 3), une surface de Riemann genre 1 est isomorphe au quotient de  $\mathbf{C}$  par un réseau  $\Lambda$  ; on peut même choisir  $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$  où  $\tau$  (le rapport des périodes) appartient au demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H}$ . Toute courbe elliptique est donc représentée par  $E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z})$  (le point base est pris en 0 par homogénéité) et  $E_\tau$  est isomorphe à  $E_{\tau'}$  si et seulement si  $\tau$  et  $\tau'$  sont équivalents par  $\Gamma(1)$ . Il existe un invariant numérique décrivant les modules de courbes elliptiques (i.e. le quotient  $\Gamma(1)\backslash\mathbf{H}$ ) données sous la forme  $E_\tau$  ( $\tau \in \mathbf{H}$ ). C'est une fonction holomorphe  $j : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ , appelée *invariant modulaire*, telle que  $j(\tau) = j(\tau')$  si et seulement si  $\tau$  et  $\tau'$  sont  $\Gamma(1)$ -équivalents ; elle se prolonge à  $\mathbf{H}^*$  par  $j(\infty) = \infty$  et induit un isomorphisme

$$j : X(1) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{C}}.$$

La fonction  $j$  s'exprime analytiquement sous la forme  $j(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$  ( $q = e^{2i\pi\tau}$ ,  $\tau \in \mathbf{H}$ ) où les  $c_n$  sont entiers ([Se]). On peut aussi définir  $j$  géométriquement par réflexions de Schwarz (voir 3). Il y a 3 valeurs intéressantes :  $j(\infty) = \infty$ ,  $j(e^{i\pi/3}) = 0$  et  $j(i) = 12^3 = 1728$ .

Les courbes elliptiques apparaissent sous de nombreuses formes, et à chaque fois il est intéressant de retrouver l'invariant modulaire. Par exemple pour la cubique lisse  $zy^2 - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3 = 0$  ( $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ ), on a  $j = 12^3 g_2^3 / \Delta$  ; toute surface  $E_\tau$  se réalise sous cette forme via la fonction  $\wp$  de Weierstrass, et les coefficients  $g_2$  et  $g_3$  sont fonctions explicites de  $\tau$  ([Se]). Voici encore un exemple : pour la cubique  $x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$  on a  $j = \mu^3(\mu^3 + 8)^3 / (\mu^3 - 1)^3$  (voir [B-K] à propos de cette intéressante représentation des courbes elliptiques).

Donnons maintenant l'interprétation des courbes modulaires  $X(N)$ . Il faut d'abord remarquer que les courbes elliptiques ont une structure de groupe abélien, évidente sur  $E_\tau$ . On observe que les points  $\frac{1}{N}$  et  $\frac{\tau}{N}$  de  $E_\tau$  sont invariants par l'action d'un

élément de  $\Gamma(N)$  : si  $\tau$  et  $\tau'$  sont  $\Gamma(N)$ -équivalents, l'isomorphisme  $E_\tau \simeq E_{\tau'}$  envoie  $\{\frac{1}{N}, \frac{\tau}{N}\}$  sur  $\{\frac{1}{N}, \frac{\tau'}{N}\}$ . En fait le quotient  $\Gamma(N)\backslash\mathbf{H}$  est l'espace des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques munies d'une base des points d'ordre  $N$ , avec une petite information supplémentaire : voir [Si].

Sachant que les points de  $X(7)$  ne sont autres que des courbes elliptiques, il devient naturel de calculer leur  $j$ -invariant. Rappelons que  $X(7)$  est isomorphe à la quartique de Klein, tandis que  $X(1)$  (quotient de  $X(7)$ ) est isomorphe à  $\widehat{\mathbf{C}}$  :

$$\begin{array}{ccc} X(7) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(1) & \xrightarrow{\simeq} & \widehat{\mathbf{C}} \end{array}$$

Dans ces "coordonnées" explicites, la projection, c'est-à-dire  $j$ , est une fonction méromorphe sur  $\mathcal{K}$  de degré 168, invariante par  $G$ . Or toute fonction méromorphe sur une courbe algébrique lisse est le quotient de deux polynômes homogènes (en les coordonnées homogènes) de même degré. Voici comment Klein calcule  $j$ . Il introduit d'abord 3 polynômes invariants par  $G$  (on rappelle que  $f = x^3y + y^3z + z^3x$ ) :

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{1}{54} \begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' & f_{xz}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' & f_{yz}'' \\ f_{zx}'' & f_{zy}'' & f_{zz}'' \end{vmatrix} \\ &= 5x^2y^2z^2 - (x^5y + y^5z + z^5x), \\ C &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' & f_{xz}'' & \nabla'_x \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' & f_{yz}'' & \nabla'_y \\ f_{zx}'' & f_{zy}'' & f_{zz}'' & \nabla'_z \\ \nabla'_x & \nabla'_y & \nabla'_z & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x^{14} + y^{14} + z^{14}) + \dots, \\ K &= \frac{1}{14} \begin{vmatrix} f'_x & \nabla'_x & C'_x \\ f'_y & \nabla'_y & C'_y \\ f'_z & \nabla'_z & C'_z \end{vmatrix} \\ &= -(x^{21} + y^{21} + z^{21}) + \dots \end{aligned}$$

Ces fonctions sont liées sur la courbe par la relation  $\nabla^7 + (C/12)^3 + 27(K/216)^2 = 0$  ( $\nabla$  s'appelle le Hessien de  $f$ ). Les courbes  $H = 0$ ,  $C = 0$  et  $K = 0$  coupent  $f = 0$  suivant les trois familles de points particuliers.

Klein exprime  $j$  comme fraction rationnelle en  $\nabla$ ,  $C$  et  $K$ , fraction déterminée par son degré et les valeurs de  $j$  sur les 24 points d'inflexions, les 56 contacts avec les bitangentes et les 84 points sextactiques (soit respectivement  $j = \infty, 0$  et 1728) ; il obtient ainsi :

$$j = -\frac{C^3}{\nabla^7}. \tag{1}$$

Klein donne aussi les coefficients de la forme normale de Weierstrass :  $g_2 = C/12$ ,  $g_3 = K/216$  et le discriminant  $\Delta = -\nabla^7$  ([K11]).

### Equations algébriques. Icosaèdre

L'article [K11] fait suite aux célèbres travaux de Klein sur l'icosaèdre et l'équation du cinquième degré. D'ailleurs, le lecteur perspicace aura déjà deviné que l'icosaèdre n'est autre que la courbe modulaire  $X(5)$  avec son groupe d'automorphismes  $\text{PSL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq A_5$ . La courbe  $X(5)$  est de genre 0, et si  $z$  est un isomorphisme  $X(5) \simeq \widehat{\mathbf{C}}$ , l'invariant modulaire s'exprime par une formule  $j = F(z)$  analogue à (1), où  $F$  est une fraction rationnelle de degré 60. Klein considère alors cette relation comme une équation algébrique de degré 60 où  $z$  est l'inconnue et  $j$  un paramètre. C'est l'équation de l'icosaèdre. Son groupe de Galois  $A_5$  agit simplement transitivement sur les racines (équation galoisienne) et toutes les racines, ainsi que celles des équations associées aux sous-groupes de  $A_5$ , s'exprime rationnellement à partir de l'une d'elles.

Klein résout explicitement l'équation de l'icosaèdre  $j = F(z)$  en exprimant  $z$  en fonction de  $q = e^{i\pi\tau}$  avec  $j(\tau) = j$ . Comme il l'explique lui-même dans [K12], cette résolution est satisfaisante. Supposons en effet que nous cherchions à résoudre l'équation  $z^n = j$  d'inconnue  $z$ , avec à notre disposition la fonction logarithme. Il suffit de choisir une détermination  $w$  de  $\log j$  et on a une solution  $z = e^{w/n}$  ; les autres solutions s'obtiennent avec les translatés  $w + 2\pi ik$  ( $k \in \mathbf{Z}$  modulo  $n$ ).

Dans le même esprit, la relation  $j = -C^3/\nabla^7$  est une équation galoisienne de degré 168 ( $j$  est un paramètre complexe) associée naturellement à la surface de Klein. Elle est résolue par les formules (1) (paramétrage de  $\mathcal{K}$ ). En effet  $j \in \mathbf{C}$  étant donné, le rapport  $\tau$  des périodes de la courbe elliptique correspondante est bien défini modulo  $\Gamma(1)$ . On choisit une valeur de  $\tau$  (n'importe laquelle, comme dans l'exemple précédent) et les formules (1) avec  $q = e^{i\pi\tau}$  donnent

une racine de  $C^3 + j\nabla^7 = 0$ ; les 168 racines sont obtenues en faisant agir  $\Gamma(1)$  modulo  $\Gamma(7)$  sur  $\tau$ .

La résolution de l'équation de degré 168 occupe une bonne partie de [K11]. Klein étudie d'abord des équations de degré inférieur associées à certains sous-groupes du groupe de Galois ("résolvantes"). Comme pour l'icosaèdre, celles-ci ont une interprétation géométrique (ici sur la quartique  $\mathcal{K}$ ). Par exemple la "résolvante de degré 8" correspond aux sous-groupes maximaux d'ordre 24 et ses 8 racines sont les équations des triangles d'inflexion ([K11]).

Par la suite, Klein prolongera ce travail par une étude analogue de la courbe modulaire  $X(11)$ ...

### 3 La surface de Klein comme quotient du plan hyperbolique

#### Uniformisation

Nous cherchons ici à décrire la surface de Klein au moyen d'un seul paramètre complexe (uniformisation). Remarquons que  $X(7)$  privée des pointes est uniformisée par définition puisque c'est un quotient de  $\mathbf{H}$ . Sur la quartique  $\mathcal{K}$ , cela se traduit par le paramétrage explicite (1), que l'on peut comparer au paramétrage des cubiques lisses par les fonctions de Weierstrass. Cependant, il ne s'agit pas d'une uniformisation de  $\mathcal{K}$  car les points d'inflexion ne sont pas atteints. Dans [K11], Klein décrit sa quartique comme quotient du demi-plan supérieur; c'est le premier exemple d'uniformisation d'une courbe algébrique de genre  $> 1$ . Le théorème général d'uniformisation ne sera démontré que bien plus tard. Voici son énoncé (Koebe, Poincaré 1907) : **toute surface de Riemann compacte est isomorphe à  $\widehat{\mathbf{C}}$  (genre 0), à  $\mathbf{C}/\Lambda$  (genre 1) ou à un quotient de  $\mathbf{H}$  par un groupe d'automorphismes sans points fixes (genre  $> 1$ )**. L'uniformisation est même valable pour le cas non compact; il y a un petit nombre de surfaces isomorphes à un quotient de  $\mathbf{C}$  (ou à  $\widehat{\mathbf{C}}$ ). Toutes les autres sont des quotients de  $\mathbf{H}$ .

#### La métrique de Poincaré

Il est temps d'introduire la métrique de Poincaré qui sera très utile pour l'uniformisation de  $X(7)$ . Elle est définie par :

$$ds^2 = \frac{|d\tau|^2}{(\operatorname{Im}\tau)^2} \quad (\tau \in \mathbf{H}).$$

On l'appelle aussi *métrique hyperbolique*. La remarque de base qui fait le lien avec les surfaces de Riemann est la suivante : le groupe d'isométries directes de la métrique de Poincaré coïncide avec le groupe des automorphismes de surface de Riemann du demi-plan. Toute surface de Riemann compacte de genre  $> 1$  admet donc une métrique naturelle, bien définie à isométrie près, et localement isométrique à  $ds^2$ . Inversement, on montre que toute surface compacte localement isométrique à  $ds^2$  (surface hyperbolique) est isométrique à un quotient de  $\mathbf{H}$  par un groupe d'isométries : c'est l'uniformisation géométrique. Ainsi, **les surfaces de Riemann compactes de genre  $> 1$  (à isomorphisme près) correspondent bijectivement aux surfaces hyperboliques fermées orientées (à isométrie directe près)**. Nous allons expliciter cette correspondance pour la surface de Klein.

#### Pavage (2,3,7) et groupe triangulaire

Dans le plan hyperbolique il existe un triangle géodésique  $\mathcal{T}$  d'angles  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  et  $\pi/7$ , unique à isométrie près. Le groupe d'isométries engendré par les trois rotations d'angles respectifs  $\pi$ ,  $2\pi/3$ ,  $2\pi/7$  et centrées aux sommets de  $\mathcal{T}$  est appelé *groupe triangulaire (2,3,7)*. On le note  $T_{2,3,7}$ . D'après un théorème de H. Poincaré, c'est un groupe discret d'isométries qui pave le plan hyperbolique (le pavé fondamental est formé de deux copies de  $\mathcal{T}$ ); algébriquement, il est engendré par 3 éléments  $u$ ,  $v$  et  $w$  (les trois rotations) soumis aux relations suivantes ([Mi]) :

$$u^2 = v^3 = w^7 = wvu = 1.$$

On voit immédiatement que  $T_{2,3,7}$  est un quotient de  $\operatorname{PSL}_2(\mathbf{Z})$  puisque ce dernier est engendré par les transformations  $S(\tau) = -1/\tau$ ,  $R(\tau) = 1/(1-\tau)$  et  $T(\tau) = \tau + 1$  soumises aux relations ([Se]) :

$$S^2 = R^3 = SRT = 1.$$

Cette petite remarque va nous guider dans l'uniformisation de  $X(7)$ .

#### $\mathbf{H}$ comme quotient de $\mathbf{H}^*$

Rappelons que  $X(7)$  est le quotient de  $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$  par  $\Gamma(7)$ . L'uniformisation sera obtenue en faisant apparaître  $\mathbf{H}$  comme quotient intermédiaire  $\Gamma \backslash \mathbf{H}^*$  où  $\Gamma$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma(7)$ . On retrouvera ensuite  $X(7)$  en faisant agir  $\Gamma(7)/\Gamma$  sur  $\Gamma \backslash \mathbf{H}^* \simeq \mathbf{H}$ .

L'idée consiste à prendre pour  $\Gamma$  le plus petit sous-groupe nécessaire à la complétion, i.e. le sous-groupe normal engendré par les stabilisateurs des pointes de  $\Gamma(7)$  :  $\Gamma$  est le sous-groupe normal de  $\Gamma(1) = \text{PSL}_2(\mathbf{Z})$  engendré par  $T^7$ . D'après le paragraphe précédent,  $\Gamma(1)/\Gamma$  est isomorphe à  $T_{2,3,7}$ .

On va construire un isomorphisme entre  $\Gamma \backslash \mathbf{H}^* \simeq \mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}$  "par réflexion de Schwarz". Tout d'abord, il existe un unique homéomorphisme du triangle  $\{\tau \in \mathbf{H} \cup \infty \mid 0 \leq \text{Re} \tau \leq 1/2, |\tau|^2 \geq 1\}$  sur le triangle  $(2,3,7)$  qui envoie  $i$  (resp.  $e^{i\pi/3}, \infty$ ) sur le sommet d'angle  $\pi/2$  (resp.  $\pi/3, \pi/7$ ) et qui est holomorphe à l'intérieur. Posons  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \cup \{\infty\}$  où  $\mathcal{D}$  est le domaine fondamental de  $\Gamma(1)$  décrit en 2. L'application précédente s'étend par réflexion de Schwarz en un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{D}^*$  sur la réunion de 2 triangles  $(2,3,7)$  contigus,  $\varphi$  étant holomorphe à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ . Le plan source (resp. but) est pavé par  $\Gamma(1)$  (resp.  $T_{2,3,7}$ ) et il existe un morphisme de groupes  $\pi : \Gamma(1) \rightarrow T_{2,3,7}$  défini par  $\pi(S) = u, \pi(R) = v$  et  $\pi(T) = w$  (voir plus haut). On peut donc prolonger  $\varphi$  de façon naturelle en posant :

$$\varphi(\gamma.\tau) = \pi(\gamma).\varphi(\tau) \quad \tau \in \mathcal{D}^*, \gamma \in \Gamma(1).$$

L'application ainsi définie est continue, holomorphe sur les translatsés de l'intérieur de  $\mathcal{D}$ , donc aussi sur  $\mathbf{H}$ . Elle est clairement  $\Gamma$ -invariante (car  $T^7 = 1$ ) et on constate sans trop de difficultés que si  $\varphi(\tau) = \varphi(\tau')$  alors  $\tau$  et  $\tau'$  sont  $\Gamma$ -équivalents. Finalement  $\varphi$  induit un isomorphisme entre la surface de Riemann  $\Gamma \backslash \mathbf{H}^*$  et le demi-plan  $\mathbf{H}$ .

La surface  $X(7)$  apparaît maintenant comme isomorphe au quotient de  $\mathbf{H}$  par le sous-groupe  $\Pi = \pi(\Gamma(7)) (\simeq \Gamma(7)/\Gamma)$  de  $T_{2,3,7}$ . Sachant que les transformations à points fixes de  $T_{2,3,7}$  sont conjuguées à  $u, v$  ou  $w$ , on voit que  $\Pi$  agit sans points fixes sur  $\mathbf{H}$ . Noter que  $\Pi$  est isomorphe au groupe fondamental de la surface fermée orientable de genre 3.

**Polygone fondamental**

La figure 2 ([K11]) est formée de 24 triangles  $(2,3,\infty)$ . En prenant le symétrique par rapport à l'axe vertical, puis les translatsés par  $\tau' = \tau + k$  ( $k$  modulo 7) on obtient un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma(7)$ , comprenant 336 triangles  $(2,3,\infty)$ .

Chaque triangle  $(2,3,\infty)$  est envoyé par l'application  $\varphi : \mathbf{H}^* \rightarrow \mathbf{H}$  sur un triangle  $(2,3,7)$ . Les points notés  $a$  sur la figure 2 sont les pointes de  $\Gamma(7)$  et ont pour images les points de valence 14 du pavage  $(2,3,7)$ . La

figure 3 représente l'image du domaine fondamental ([K11]). Il s'agit d'un polygone régulier à 14 côtés, décomposé en 14 triangles équilatéraux d'angle  $\pi/7$ , chacun étant l'image de l'une des 14 copies de la figure 2. La pointe  $\infty$  va sur le centre de la figure. Chaque côté est l'image de 2 demi-cercles. Par exemple, le côté 1 est l'image des 2 demi-cercles  $(2/7,1/3)$  et  $(1/3,3/7)$  (voir fig. 2) ; on peut le repérer par la pointe  $1/3$ . Ainsi les côtés  $2k + 1$  (resp.  $2k$ ) correspondent aux pointes  $k + 1/3$  (resp.  $k - 1/3$ ),  $k$  modulo 7.



**Figure 2** : 1/14 du domaine fondamental de  $\Gamma(7)$

Un petit calcul permet alors de déterminer les identifications qu'il reste à effectuer pour obtenir la surface de Klein : il suffit de voir comment les pointes sont identifiées par  $\Gamma(7)$ . D'abord, les pointes de la forme  $k + 1/3$  (resp.  $k - 1/3$ ) ne sont pas équivalentes entre elles. Ensuite, si 2 pointes  $k + 1/3$  et  $k' - 1/3$  sont équivalentes par  $\Gamma(7)$ , on trouve (en réduisant modulo 7) que  $k + 1/3 \equiv k' - 1/3 \pmod{7}$ , i.e.  $k' - k \equiv 3 \pmod{7}$ . On en conclut que le côté  $2k + 1$  doit être identifié au côté  $2k + 6$ . Ceci achève la construction géométrique de  $X(7)$ .

Remarquons qu'il y a 2 classes de sommets, ce qui permet de retrouver le genre. En effet, si une surface orientable est le quotient d'un polygone à  $2n$  côtés (identifiés par paires) avec  $p$  classes de sommets, son



genre est donné par ([Ma]) :

$$g = \frac{1}{2}(1 + n - p).$$

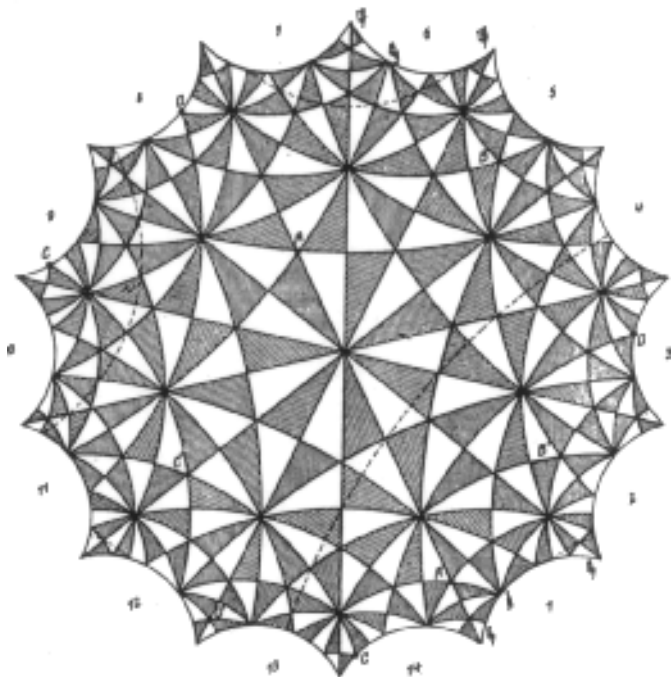


Figure 3 : La « figure principale » de Klein

La surface de Klein est un *polyèdre régulier* (tout comme l'icosaèdre). Les 336 triangles du pavage (2,3,7) peuvent être regroupés (par 6) en 56 faces triangulaires ; il y a alors 24 sommets et 84 arêtes. Les barycentres de ces simplexes (sommets, arêtes et faces) correspondent aux 3 familles de points particuliers sur la quartique : inflexions, points sextactiques et contacts avec les bitangentes. Klein décrit en détail la combinatoire de ce polyèdre remarquable ([K11]).

### Automorphismes

Pour conclure voici une autre propriété intéressante de la surface de Klein : son groupe d'automorphismes atteint le maximum autorisé en genre 3. En effet, le groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann  $X$  compacte de genre  $> 1$  est toujours fini, et son cardinal est borné par le célèbre théorème de Hurwitz ([Hu]) :

$$|Aut X| \leq 84(g - 1).$$

La finitude est due à Klein. Pour obtenir la majoration, on peut utiliser l'expression du genre à partir

d'une triangulation ([Ma]). On choisit des triangulations convenables de  $X$  et de  $Aut X \backslash X$  (qui est une surface, voir 2) et un petit exercice de dénombrement donne alors la borne de Hurwitz.

De ce point de vue, la surface de Klein est spéciale dans la liste des courbes modulaires  $X(N)$ , qui sont relativement moins symétriques. Par exemple pour  $p$  premier ( $\geq 7$ ) on a  $|Aut X(p)| = 12(g - 1) \frac{p}{p-6}$ .

En genre 3, la surface de Klein est l'unique surface qui a 168 automorphismes ([Br] ou [Ku]). Cependant, elle a des grandes sœurs (de genre supérieur) qui atteignent aussi la borne de Hurwitz, et ceci pour une infinité de genres ...

### Bibliographie

- [B-K] BRIESKORN E., KNÖRRER H. : *Plane algebraic curves*, Birkhäuser (1986).
- [Br] BROUGHTON A. : Classifying finite group actions on surfaces of low genus, *J. Pure Appl. Algebra* **69** (1990) 233-270.
- [Hu] HURWITZ A. : Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, *Math. Ann.* **41** (1893) 403-442.
- [K-M] KARGAPOLOV M., MERZLIAKOV I. : *Éléments de la théorie des groupes*, MIR (1970).
- [K11] KLEIN F. : Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, *Math. Ann.* **14** (1878) 428-471 (= *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* t. III 90-135).
- [K12] KLEIN F. : *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover (1956).
- [Ku] KURIBAYASHI A., KOMIYA K. : On Weierstrass points and automorphisms of curves of genus three, *Algebraic Geometry, Proceedings, Copenhagen 1978*, Springer LN **732** (1979) 253-297.
- [Ma] MASSEY W. : *Algebraic topology : an introduction*, Hartcourt, Brace & World (1967).
- [Mi] MILNOR J. : On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p,q,r)$ , dans *Knots, groups and 3-manifolds*, L. Neuwirth ed., *Ann. of Math. Studies* **84** (1975) 175-225.
- [Re] REYSSAT E. : *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhäuser (1989).
- [Se] SERRE J.-P. : *Cours d'arithmétique*, P.U.F. (1970).

- [Sha] SHAFAREVICH, I. : *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag (1974).
- [Shi] SHIMURA G. : *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press (1976).
- [Si] SILVERMAN J. : *The arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag (1986).

◇ Christophe Bavard  
UMPA ENS-Lyon  
46, allée d'Italie  
69364 Lyon cedex 7  
`bavard@umpa.ens-lyon.fr`