GROUPE DE TRAVAIL: GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

FLORESTAN MARTIN-BAILLON

Contents

But du groupe de travail: arriver rapidement à la classification des groupes et algèbres de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$, puis éventuellement sur $\mathbb{R}$. Comprendre les mots: forme de Killing, racines (simples, positives), poids, sous-groupe de Borel, sous-groupe parabolique, sous-groupe de Levi, groupe de Weyl, diagramme de Dynkin, chambre de Weyl, sous-espace de Cartan.

Quelques références que j'apprécie:

- Representation Theory, Fulton and Harris, 2004 [1] : Le plus pédagogique, parfois pas toute les preuves.
- *"Groupes et Géométries"*, Paulin, 2014 [2] : très efficace mais pas très motivé/motivant.
- Plein de trucs bien dispersés dans Tao, eg: Hilbert's Fifth Problem and Related Topics, Tao, 2014 [3] (généralités, lien algèbre/groupe), Poincaré's Legacies, Tao, 2009 [4] (rapide classifications des représentations de SL_2).

1. Plan du groupe de travail

(1) Généralités groupes et algèbres de Lie sur $\mathbb{C}$:
  - définitions, lien entre groupe et algèbre (un peu de géométrie différentielle),
  - première classificaton: nilpotent, résoluble, semisimple,
  - groupes classiques,
  - conséquence de la semisimplicité.

(2) Représentations des algèbres de Lie.
  - Exemple de $\mathfrak{sl}(2)$
  - Exemple de $\mathfrak{sl}(3)$

(3) Classification des algèbres de Lie.

UNIV. RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France. Email: florestan.martin-baillon@univ-rennes1.fr.

(4) Revenir aux groupes.
(5) En déduire la classification sur $\mathbb{R}$.

et puis si on en veut encore, on pourrait faire: groupes de Lie compacts, espaces symétriques, différentes décompositions, formule des caractères de Weyl, etc.

2. Exposé 1: Introduction

2.1. Résumé. Définition d'un groupe de Lie, algèbre de Lie. Notions historiques ? Correspondance groupe algèbre. Algèbre de Lie semi-simple, résoluble.

Classification des algèbres de Lie semisimple. Sous-algèbre de Cartan. Système de racines.

2.2. Histoire. Lie: notions de groupe de symmétries d'une équation différentielle, quête d'un analogue de la théorie de Galois pour les équations différentielles. Exemple: équation $dy/dx = f(x, y)$ avec un groupe à 1-paramètre de symmétries implique *résoluble par quadrature* (ie intégration).

Klein: géométrie = Groupe de Lie et espace homogène. Exemples: géométrie euclidienne, sphérique, hyperbolique, projective, pseudo-riemannienne (à courbure constante)...

Killing, Cartan: classification.

2.3. Exemples. Groupes de matrices, revêtement universel de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, groupe de difféomorphismes.

2.4. Définitions. Groupe de Lie: variété et groupe, et opérations lisses.

Algèbre de Lie: champs de vecteurs invariants à gauche = tangent en l'identité. Pourquoi ? penser à l'action sur une variété.

Application exponentiel.

Crochet de Lie: crochet de Lie des champs de vecteurs = dérivée de la dérivée de la conjugaison.

Morphisme de groupe et algèbre: ce à quoi on pense.

2.5. Correspondance. Correspondance morphisme groupe et algèbre. Composantes connexes, revêtements, isomorphisme local. Théorème d'Ado: toute algèbre de Lie est linéaire (remarque: faux groupe de Lie).

2.6. Première classification. Simple, semi-simple, résoluble, nilpotent. Radical résoluble. Théorèmes de Lie et d'Engel.

2.7. Algèbre de Lie semi-simple. Forme de Killing. Algèbre de Cartan. Décomposition en espaces de racines.

References

[1] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Vol. 129. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2004. ISBN: 978-3-540-00539-1 978-1-4612-0979-9. DOI: 10.1007/978-1-4612-0979-9.

[2] Frédéric Paulin. “Groupes et Géométries”. In: *Notes de cours* (2014).

[3] Terence Tao. *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics*. Graduate Studies in Mathematics volume 153. Providence: American mathematical society, 2014. ISBN: 978-1-4704-1564-8.

[4] Terence Tao. *Poincaré's Legacies: Pages from Year Two of a Mathematical Blog*. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2009. ISBN: 978-0-8218-4883-8 978-0-8218-4885-2 978-0-8218-4871-5.